ゲージ理論入門 I（第2版）
―電磁相互作用

I.J.R. エイチスン・A.J.G. ヘイ／著
藤井昭彦／訳

講談社サイエンティフィク

GRADUATE STUDENT SERIES IN PHYSICS

Series Editor: Professor Douglas F Brewer, M.A., D.Phil.
Professor of Experimental Physics, University of Sussex

GAUGE THEORIES IN PARTICLE PHYSICS

A PRACTICAL INTRODUCTION

2nd edition

IAN J R AITCHISON
Department of Theoretical Physics
University of Oxford

ANTHONY J G HEY
Department of Electronics and Computer Science
University of Southampton

ADAM HILGER, BRISTOL AND PHILADELPHIA

Originally published in English by Adam Hilger, Techno House, Redcliffe Way, Bristol BS1 6NX, England.
First published 1989

まえがき

1982 年に出版された本書の第 1 版のまえがきで，著者らは次のように書いておいた．“本書は，素粒子物理学において物理的関心の高い多くの諸量を計算する実用的な手引になることを意図している．今日，これはゲージ場諸理論に適する Feynman 図形の手引きと，これら図形に基づく計算技術である．著者らの目的は，高エネルギー物理学の最近の実験で検証されつつあるゲージ諸理論を，“適正”に理解するために必要な最少かつ本質的な知識を与えることである”．ゲージ諸理論の予言をできるだけ広範囲の人々に理解できるものにしたい，という強い希望が著者らの動機になっていた．この点に関しては，文献は一般にきわめて技術的だったからである．本書の 3 つの特徴は，以下に述べるように，いずれも“とっつきやすさ”の要求から生じたものであった．まず，ラグランジアンに基づく場の量子論の枠組を排して，かわりに波動関数を用いる Feynman の構想に基づく直観的方法をとったこと．つぎに，本書のはじめの 1/3 は，ゲージ理論の起源ともなりかつもっともよくわかっている量子電磁力学の解説にあて，比較的なじみ深い状況で多くの計算技術を紹介し，そののち強い相互作用・弱い相互作用のゲージ諸理論に一般化したこと．最後に，可能な限り，形式上および概念上の難しい点を説明するために物理的な議論や類推を用いたこと．

第 1 版の刊行から 6 年たち，粒子物理学の状況にもいくつかの点できわめて重要な変化があった．本書の刊行とほぼ時を同じくして，よく知られているように，CERN（欧州原子核共同研究機関）の陽子・反陽子衝突型加速器を用いた UA 1，UA 2 グループの一連の大発見が行われた．これらの実験は，弱い相互作用の Glashow-Salam-Weinberg 理論の主要な予言を華麗に確認したばかりでなく，さらに QCD の支持をも与えた．その後の高精度の実験により，“標準モデル”（標準模型）の安定性は特に疑いを入れる余地はなく，これからのよ

り野心的な理論は，このモデルをある適切な極限内至近似として含まなくてはならないと考えられている．

実際，第二の特筆すべき特徴は，議論の余地なく確定度の高い方法で“標準モデル”を超える“統一理論”がただ1つ生じてくることはない，という認識である．大統一，テクニカラー，超対称性，超重力，ひも（弦）の理論などそれぞれ注目すべき点を持っているが，しかし，次の世代の加速器で得られる（と望まれている）より多くの実験的手がかりが，強く強く必要とされているのである．その意味では，標準モデルは理論的にも実験的にも，比較的自己充足的で堅固な一章とみなされてよい．この点で“一線を画し”あとはTeV領域の情報を待つというのは合理的な態度である．

実験的な発見，そこから生ずる多様な理論的見通しは，共に本書（第1版）を大きく改訂させる必要を示していたが，一方もともとの目的や動機や方法を忠実に残す必要も明示していた．きわめて明らかであったが，最近の実験的発見をかなりの程度議論することが本質的に必要と思われた．本書第1版の主要な目的は，標準モデルの3つのゲージ理論の中で簡単な計算を行って，実験と比較しうる意味のある結果を得ることであった．今やあまりにも多くの実験結果が発表されているので，理論と実験の対決を示すデータの価値はきわめて高い．したがって，本書第1版が実験データをわずか5つの図に表したところを，第2版は50以上もの図に表すことができたのである．

理論の方面でも大きな修正を行った．実は，第1版を事実上裏返してしまった．第1版では，ゲージ原理とゲージ理論としてのQEDの議論は第8章ではじめて現れてきたが，新版では早くも第2章にでてくる．実際，第1版より演繹的な方法を採用した．QEDの発見法的な展開に重きをおき，ほかの理論もその類推のうえに立ててきたのに対し，今度はQEDの“ゲージ”観をもっとも信頼のおける論理的出発点としてとりあげ，この概念を標準モデルの中心に据えたのである．

さらに，場の量子論の方法を導入すべきか否か，という決定的な点において，著者らは態度を変更した．これは，ひもの理論が場の量子論にとってかわるような形勢にある時点で，いささか皮肉と思われるかもしれない．しかしながら，標準モデルの成功は場の理論の概念の重要な立証をなすもので，自然界の3つ

の力を，1つの概念の枠組のなか（微妙な違いは別として）で理解することに成功している．

まさに物質と力の本質に関する古くからの疑問に答えて，20世紀の解答の中心をなす量子場の基礎物理は，いままでよりずっと近づきやすいものになったはずである，と考えられる．そこで場の量子論の初等的導入を自己完結する形で第4章に取り入れることを試みた．可能な限り物理的なモデルや類推を強調しながらも，計算の段階で役にたつような形式も展開するように努めた．そのうえで第5章にやや詳しく，なぜ2つの荷電粒子間の電磁相互作用が光子の“交換”によるとみなしうるかを論ずることができた．本書第1版では，量子を放出したり吸収したりする定式化を入れておらず，この決定的な点を発見的な方法に頼ったので，何か厳密でないものになってしまったことは否めない．もちろん，これはFeynman図形の共変的な振幅の物理的解釈にとって，基本的な事がらである．

ラグランジアンに基づく場の量子論は，本書第1版の明らかな不備 — 電荷のような物理量の保存とそれに対する対称性の間の失われた鎖 — をとり払うことにもなる(4.6節および第8章参照)．さらに対称性の自発的破れの議論を改良することもできる（第13章）．

しかし，波動関数を捨て去ることは断じて行わなかった！ 他の方法では得られないような重要な物理的洞察を得るため，場の量子論のごく一部を（本書で行ったように）取り入れることは可能であるように思われた．しかしそのほかは，すなわち実用的な計算は，前版と同じく波動関数の方法によった．場の理論に基づく摂動論を完璧に展開することはもとより本書の範囲を超えているからである．もっともやさしいゲージ理論（QED）をまず展開する，という計画は前版のとおりであるし，また当然である．

最後の大きな改訂は，QCDに関する（長い）章をつけ加えたことである．本書第1版ではQCDには余り関心を払っていなかった．他の部分と同じく，QCD理論も第一原理からできるだけ簡単な方法で出発し，実験と対決できる点まで展開する，というのが本書の目的であった．これはかなりレベルの高い注文で，最後の節(9.5および9.6節）は初読の際は省略してもよい．もちろん，ここでは摂動的QCDを論じているので，第15章の“4つの話題”の中に，場の理

論の格子による方法をQCDの非摂動的側面とともに入れておいた.

本書第1版は，大変わかりやすかった — 少なくともいろいろな分野の広い範囲にわたる人々に読んでもらえた．これは当時，比較的“初等的”なレベルでは他の書物がほとんどなかったからに違いない．第1版の内容にさまざま付け加えたことで，ある読みやすさ（これが原則的な目的であることに変わりはない）を損なわなかったことを切に希望している．実験データの記述を増やしたことは障害ではなく，むしろ理論の理解に役だつものと感じている．場の量子論の本質を把握することは，理解を容易ならしめるばかりでなく，それ自身として刺激的なことだと考えたい．このほかにまったく新しい章，第1章を付け加えて，粒子物理学の“事実”とそれを解析するのに用いられる理論の簡単な概観を述べておいた．ここでは，標準モデルを過去100年間におよぶ物理の概念的展開の見地から中心に据えおいた．これは非専門家に本書の全題目をより抵抗少なくとりついでいただくことを期待したからである.

今度の版では，したがって第1部は顕著な実験事実の簡単な概観からはじめ，ついでそれらを理解するためのさまざまな理論的概念の紹介がやや詳しく続く．これは第1版と大きく異なるところで，第1版では概念上の詳しい点は終わりのほうまで残しておいて，まずできるだけ早くQEDの“実際計算”ができるように意図したのであった．新版の構成のほうがたしかに論理的にみえるが，またその代償ももちろん払ったことになった．断面積を計算する前に全体のページ数の1/4を費やしてしまったのである．しかしながら，読者諸氏も（教師諸君も）第1章に与えた詳しい概念上の基礎が，実用計算を少し待つことに値する，と考えてくれることを希望する．計算は第2部から集中的に行うが，これは第1版のQED資料をほとんどそのまま利用している．第3部では非可換ゲージ理論とQCDの概観を行う．第4部は弱い相互作用の現象論，第5部は電磁弱理論の展開である．第1版との主要な違いは，場の量子論を（制限された範囲で）用いたことと，たくさんの実験データをとり入れたことである．最後に第6部では読者を，枝線図形を超え，摂動論を超え，（多少とも）標準モデルを超えた所へ案内する．書き加えは全体としてかなりの量になるから，増大した大きさに合わせるために付録Aもかなり拡大されている.

謝　詞

以上に本書第1版のまえがきから，当時お世話になったたくさんの方々への感謝の言葉を再録する．もちろん，その助力はこの版でも大部分の所に生かされている．

著者の1人 Aitchison は，J. C. Taylor, C. L. Smith，のちに G. Ross と同じ階に研究室を持つ，という特権を享受し，これらの人々から多くを学んだ．のちの2人は本書第12章（新版の第15章）の草稿を読んで，有用なコメントを与えてくれた．同じく R. Stinchcombe も第9章（新版の第13章）の初期の草稿に有用な示唆を与えてくれた．C. Fraser は，多くの章の草稿について鋭い批判をよせ，親切に力づけてくれた．最後に，Aitchison はニューヨーク州ロチェスター市の R. T. French Company に深甚な謝意を表する．その援助により 1978～79 年の1年間ロチェスター大学に滞在することができ，その間すべての教育義務から離れて，知識の不足を補うのに少なくとも多少の進歩をなすことができた．著者の1人 Hey は，サウザンプトン大学の同僚諸氏の温かい支援に感謝する．特に G. McEwen はこのような書物の執筆をおおいにすすめてくれた．著者2人は，第9章（新版の第13章）の草稿について J. Mandula と D. Nicole の寄せられた俊敏なコメントに感謝する．J. Paton は第9章（新版の第13章）を草稿段階で批判してくれたばかりでなく，完全原稿に目を通して，非常に重要な示唆を与えてくれた．J. Ambjorn と R. Hughes は第8（新版の第2章および第8章），第9（新版の第13章），第12（新版の第15章）章の校正刷を克明に読んでコメントをしてくれ，D. Bailin と B. Kelly はそれぞれ，重大な思い違いを訂正してくれた．著者はまた，オックスフォード大学およびサウザンプトン大学，また夏期学校における数世代の学生諸君に感謝する．彼らはこの計画の初めから，いろいろ建設的な注意を寄せてくれた．本書に誤りはもはや残っていない，と十分信頼している．S. Makin は長い複雑な原稿を快くタイプしてくれ，J. Hey は索引の作製に協力してくれた．併せて深く感謝するしだいである．

また第1版に散見した小さな誤りや誤植を注意してくれた方々に感謝する．

これらは1983年の増刷版で訂正しておいた．QEDの現状(6．10節)を最新のものにするため，T. Kinoshita（木下東一郎）教授の書簡から大きな恩恵を受けた．

この版で新しく設けた章は，多くの人々に負うている．第4章のたねは，Heyが1984，1985年にRutherford Appleton研究所（RAL）で高エネルギー物理若手の学校で行ったただ一回の“場の量子論とFeynmanの規則”と題した突貫講義である．この内容はJ. BellのCERN夏の学校の講義“実験的場の量子論”に触発されている．当時RALで若手の学校を主宰していたR. Cashmoreはこの新基軸を力づけ，さらにHeyの講義“素人の格子ゲージ理論”を入れるためプログラムを空けてくれた．この講義は本書第15章の最後の節のもとになっている．RAL若手の学校におけるHeyの地位はAitchisonが1986年に引き継いだ．新しい主宰者J. Daintonは熱心にかつ無心に場の量子論の教養を大幅に取り入れることを主張した．第4章はその結果の一部である．第9章および第14章の新しい節の原稿を次々と作っていく間に，多くの人々の専門的な助力におおいに恩恵を受けた．これはAitchisonが1985～86年の間CERNに滞在したことからはじまる．研修を許可してくれたことに対し，Oxford大学およびWorcester学寮に，またCERN理論部の心温まる歓待に対し，M. Jacobに感謝する．このCERN研修は，すでに新しいデータを得ている人々と接触し，新しいデータの意義を把握するまたとない機会であった．特に，L. DiLellaは教育的価値絶大な講義ノートやOHPシートや総合報告の資料などを惜しみなく提供してくれた．T. Weidberg，H. Cheungは第9章および第14章を注意深く読んでくれた．Cheungは当時研究生であったがまた理想的な読者代表であった．同様に，S. GeerおよびB. Scottは同章の内容について有用な資料を与えてくれた．M. Penningtonもまた第9章について注意を寄せてくれたが，その大半は彼の優れた論文 *Report on Progress in Physics*, **46**, 393（1983）から重要な概念を引用している．主要な発見については均衡のとれた取り扱いをしたつもりであるが，“誰が何をしたか”という見地では，時に強い感情が喚起される場合もあることを著者らはよく知っている．以上に記した諸兄の助力にもかかわらず，本書の記述に対する責任は一切著者にある．もし不注意にも誤った印象や誤りやすい印象を作り出したならばお詫びし，丁寧に修正して下さること

を望み，修正を聞き入れたいと思っている．

特別な謝詞がまだ残っている．E. Squires は Adam Hilger 出版社を代表して終段階の全原稿を隅から隅まで読み，不適切な個所やよくない個所をたくさん指摘してくれた．著者らは同氏に深く感謝する．G. McEwin は Southampton グループの同僚および学生として，原稿のいろいろな節に有用な注意をしてくれうむことがなかった．Hey は同氏に深く感謝する．著者らは Kent 州 Green-hithe の商船学校長 G. Emmons 氏に特別な感謝の言葉を贈りたい．氏自身は素粒子理論家ではないが，このたぐいの問題にあふれんばかりの熱心さで関心を寄せ，著者ら同様にこの第 2 版のはじめから終わりまで付き合ってくれた．初期の原稿に定性的変化をもたらした賢明な示唆に加え，終期の原稿では細心な完璧さで方程式の細部まで検討してくれた．また普通の友人の枠を超えて，校正まで一緒にやってくれた．著者らは深く同氏を徳とするものである．このような努力にもかかわらず，まちがいは残っているかもしれないということもよく承知している．お気づきの点があれば著者らにご注意下さると幸いである．

1988 年 5 月

I. J. R. Aitchison
A. J. G. Hey

訳者まえがき

本書の第1版は1982年（訳書は1983年），第2版は1989年の刊行である．この間にいわゆる標準モデル，すなわち電弱理論と摂動論的QCD(量子色力学)が定着した．第1版は，量子力学の標準的な知識を持つ読者に対し，高エネルギー過程の計算法をself-containedに伝授する，という所期の目的をよく果たしたと思う．

この第2版は，標準モデルの物理像，非可換ゲージ理論とQCD，場の量子論入門などの章を補って，第1版にくらべ70%近い増ページになっている．しかし新版でも旧版と同じく，実用的な計算はすべて波動関数を用いる一体の量子力学の枠内で行なっている．場の量子論への序説は，その正当化のために新たに付け加えられたものである．著者らがまえがきで自賛しているように，ゲージ諸理論の理解と応用という目的に対しては，新版は初等教科書としてより系統的より包括的であり，したがって改訂の実が上がっていると言ってよい．

新訳書は再び2分冊に分ち，第I巻には全体の序論とQED(量子電磁力学)，第II巻にはQCDと電弱理論を配した．第I巻の思想的中核は，相対論的波動方程式の負エネルギー解を反粒子と同定するFeynmanの解釈である．またその技術的中核は，Feynman diagram（図形）による摂動計算，いうなれば“di agram mar”の詳細な解説である．原著の副題として“A Practical Introduction”と注記されているように，付録も含めて断面積の計算に必要なあらゆるknow-howが，余す所なく与えられている．

第II巻の思想的中核は，非可換ゲージ諸理論と，それを現実の世界に適用するときに必要なHiggs機構という力学的モデルである．半世紀前のFermiのベータ崩壊の理論・湯川の核力の理論以来40年間，素粒子の理論は運動学と現象論の枠を超えることができなかった．素粒子間の相互作用を記述する力学原理が欠けていたからである．今日，物質の素子と考えられる基本粒子はクォー

クとレプトンであるが，これらの粒子はスピン 1/2 の“質点”としての時空（あるいは外部）自由度のほかに，時空間の自由度には帰着できないある内部自由度を持つと断ぜざるをえない．この内部空間の構造に関して特定のモデルをひとつ設定すれば，あとは自動的に基本粒子間の相互作用が決まってしまう，という論理と手続きがゲージ原理である．現在この力学原理は，基本粒子のすべての相互作用に普遍的に成立するものと信じられている．

原著の各章の終わりには問題が与えられている．これは新しい題材を開拓するというよりは，むしろ本文の内容を理解するために，本来ならば本文に組み込まれてしかるべき計算を別紙で行え，という類いのものである．本文の行間を埋めながら読破しようという諸君は容易に答を得てしまうであろうが，初学や独学の読者の便宜をはかって，原著にはない略解をつけておいた．

素粒子・原子核など，sub-atomic physics の勉強を始める学部高学年・大学院初学年の諸君が，短期間に集積しなければならない知識は多い．この訳書がそのような若い諸君の教科書・参考書として，相対論的量子力学やゲージ理論の学習に役立てば，訳著にとって望外の幸せである．

1992 年 1 月

藤井昭彦

目　　次

第3章　Klein-Gordon 方程式・Dirac 方程式とその負エネルギー解の解釈

第4章　場の量子論

第2部 量子電磁力学（QED）— われわれの知る最良の理論

第5章 スピン0の粒子の電磁相互作用：力と粒子の交換過程

第6章　スピン 1/2 の粒子の電磁相互作用

第7章　深非弾性電子・核子散乱とクオーク・パートン模型

第 II 巻 目 次

第1部　実験的および理論的序論

したがって自然界には物体粒子をきわめて強い引力で凝集させうる原因がある．それを見いだすことは実験哲学（物理学）の課題である．

Issac Newton, "光学" 巻末の31番目（最後）の"不審設問"より（G. Bell and Sons 社（ロンドン）発行の復刻第4版，p. 394（1931）

第1章　クオーク，レプトン，および両者の間の力

1.1　標準模型

粒子物理学の伝統的な目標はいままで，ニュートンの試みに対応して構造を持たない物質の単位と見られるものを同定し，その間に働く力を理解することであった．このように述べると，計画は二重の側面，一方において物質，他方において力，の問題に及ぶ．物質の最小単位はもっとも簡単な形で相互作用をすると期待され，物質の基礎単位と基礎的な力の間には深い関連があると考えられる．物質と力の連合した性質は，Thomson の電子の発見と Maxwell の電磁場の理論のなかに完璧に例示されており，両者は現代の粒子物理学の発祥の地となっている．電子は“電気の粒子”，すなわち現在称するところの電磁場の基本的な源，その運動により電磁流が生ずる源としても，さらには物質の重要な構成要素としても認識されている．振り返ってみれば，その後 100 年間かそこらの粒子物理の歴史は，2 つの新しい非電磁的な力，つまり弱い力と強い力の発見と研究に尽きる．これは，新しく発見された物質の階層（はじめは原子核，ついでハドロン）の構成粒子としても，また新しい力の場の源としても役にたつ“電子像”の探求にある．この研究は最近決定的な進歩を遂げた．実際電子に類似した物質の単位がいろいろ同定され，部分的ではあるが高度に確実な，強い力と弱い力に関連する場の諸理論の実験的検証が行われた．この理論はもともとの電子・電磁場の関係をみごとに包摂し一般化したものである．これら諸理論は一括して，というよりも名前だけでは見当がつかないうらみがあるが控えめに，“標準模型”と呼ばれている．本書はこの理論への初等的な手引きである．

簡単にいえば，標準模型の物理像は次のごとくである．物質の単位には 2 種の型があり，それはレプトンとクオークである．ともに $\hbar$ を単位にスピン 1/2

を持ち，高エネルギー加速器で最近確められた最短距離においても無構造である．レプトンは電子の直接の一般化である．レプトンは，電荷を持てば電磁相互作用と弱い相互作用を持ち，中性であれば弱い相互作用だけを持つ粒子である．電子が電磁相互作用だけでなく弱い相互作用を持つことは，ベータ崩壊の研究を通じてきわめて早い時期から明確に知られていた．しかし，ベータ崩壊で生ずる電子につねに伴う中性のレプトン仲間，反ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ が完全に確認されるまで，長い年月がかかった．これに比較して，ハドロン（したがって原子核）のフェルミオン構成要素であるクオークは，“強い相互作用をする”電子の類型である．クオークは，3つの相互作用（強・電磁・弱）のすべてを通じて相互作用を行う．この性質は，実に物質の単位を2つの型に分類する基礎ではあるが，いつか3種の力を統合することが可能になれば，おそらく消失する性質であろう．いずれにしても，クオークとレプトンの弱い相互作用と電磁相互作用間はともに，電弱理論（第13章および第14章）によって部分的に統一された形で記述される．この理論は量子電磁力学（第5章および第6章，QED）を一般化したものである．一方クオークの強い相互作用は，量子色力学（第8章および第9章，QCD）で記述され，これもQEDを一般化したものである．クオークもレプトンも電弱場の源であるが，クオークだけが強い場の源である．QEDの概念からの類推に従い，弱い場や強い場の“荷量”や“流れ”についても論ずる予定である．

この物理像によれば，原子・原子核・ハドロンという観測された“構造のレベル”は，いろいろな段階のつながりから成る．QCDの相互作用をするクオークは，陽子・中性子・パイオンのようなハドロンを作る．この過程の詳細はまだ理解の域に達していない，と直ちに認めざるを得ない．強く相互作用をする場の量子論を扱う計算が困難なためである．本書の最後（15．4節）でこの点に戻ってくるであろう．クオーク間の残留する力は，陽子と中性子の間に見られるようにかなり複雑な力を与えると考えられている．この力はこれら“核子”を束縛して原子核を作り上げるのに役立つ．この段階もまだよくわかっていないが，複雑な原子間力がついに構成粒子間の残留電磁力に帰せられるのに似ている，とみなされる．もちろん，電子を原子のなかの原子核に結びつけているのは，この電磁相互作用である．2つの議論に組み立ての相違があるにもかか

わらず，QCD をなぜ信奉するのかという理由は，第9章で論ずることにしよう．弱い力はその名がすでに示すとおり，今まで研究されてきたどんな粒子系についても，粒子を束縛するに足るほど強くはない．

すべての力の中でもっとも貴ばれるべき力，重力（万有引力）が明らかにこの話に欠けていることに読者は気がつかれたであろう．しばらくの間はそのとおりであろう．実際的な見地からは，まったく合理的である．というのは，重力の効果は弱い力からも何桁も小さく，少くとも粒子間の距離が現にわれわれが論じている距離よりもずっと小さくなるまで，効いてこないからである．したがって，また重力は，今まで述べてきたように，われわれが見いだした類縁性を持つ他の力とは，少し違っているのである．“重力荷”を持つような特定のフェルミオンはない．“すべて”の物質が重力を及ぼすように思われる．もちろん，これが重力を幾何学的に理解する Einstein の方法の動機であった．“ひも”の理論（Green *et al*., 1987）の最近のめざましい進展にもかかわらず，Einstein の考えたようなすべての力の統一化には，まだまだ実現に遠いというのが正直なところである．これらの考え方をさらに詳しく論ずることは，本書の所期の目的をはずれることになるであろう．

本書は，粒子物理学の教科書として完全に首尾一貫していることや，観測された現象の膨大な範囲を総括し，以上のような物理像が抱かれるに至った主要な段階を概観すること，を企ててはいない．それについては他の文献（例えば Perkins, 1987）に譲る．しかしこの章の残りの部分で，物質と力に関する現在の見方が確立するに至った顕著な実験事実について，簡単にまとめを行おう．同時に，最近の物質観を理解するために必要な概念の枠を紹介しようと思う．

1.2　物質構造のレベル — 原子からクオークへ —

微視的に小さな系の構造を解明するには，どんな種類の実験を行えばよいのだろうか．3種類の基本的なタイプをあげることができよう．それは，散乱，分光学，分解の実験である．これは原子 ⟶ 原子核 ⟶ ハドロン ⟶ クオークという発見の鎖のどれにも共通なテーマである．

1.2.1　原子から原子核へ

前世紀の終わりごろ，Thomson その他の人達の実験は，電子の電荷と質量を確定した．特に，電荷の大きさは一価にイオン化した原子の電荷の大きさと正確に等しいことが判明した．したがって，少なくとも原子の一部が“はがれて”いることを示す．1909 年に至って，英国マンチェスター大学の Geiger と Marsden は，普通でない実験事実を報告した．Rutherford が先べんをつけた計画に従って，彼らは薄い金属箔によるアルファ粒子の散乱を調べていた．おそらく当時の控えめな言いかたに従ったのであろうが，彼らは次のように報告した．“実験の示す所によれば，アルファ粒子のうち一部分は，6×10^{-5} cm の金の薄層から角度 90°，あるいはそれ以上の角度で反射されることがあるようである（Geiger and Marsden，1909）．”

後年 Rutherford は，彼がこの結果を知ったとき，あたかも砲弾が一枚の紙に当ってはねかえされるのを見たかのように驚いたと述べ，これは有名な逸話になった．Rutherford はその説明を見いだすのに 2 年かかった．原子は電気的に中性であることが知られており，原子よりずっと小さな質量を持つ負に帯電した電子を含むこともわかっていた．問題は，それならば重い，正に帯電した物質はどう分布しているのか，ということであった．一般に受けとられていたのは，正電荷は原子の容積全体にわたって一様に分布しているのであろう，という見解であった．この種の特定のモデルは，1910 年 J. J. Thomson の提唱したモデルであった．Rutheford(1911) が注意したことは，このようなモデルでは，アルファ粒子は 1 回の散乱過程では非常にわずかしか散乱されず，大きな振れは，彼の言う言葉を借りれば，“通過した物質層の原子による微小散乱の積み重ね”でしか起こり得ない．しかし，“確率論に基づいた簡単な計算を行うと，アルファ粒子が 90° 以上曲げられる機会はほとんどない．”

Rutherford はさらに続ける．“大きな角度の振れはただ一回の原子衝突によって起こると考えるのが合理的である．大きな振れを起こす第二の衝突が起こる機会は，たいていの場合，非常に小さいからである”．

こうして原子核，原子が含む“硬い”構成要素という，小さな，重い，正に帯電した芯，の概念が生まれたのであった．もっと正確に言えば，“やわらかい”原子のモデルでは散乱粒子の分布が振れの角とともに指数関数的に減少するのである．観測された分布がこの指数関数的な形からずれることが“硬い”散乱

の存在を示す．Geiger と Marsden はおよそ 2×10^4 個のアルファ粒子のうち1個が薄い金箔を通過するとき90° あるいはそれ以上に曲がることを示した．これは"やわらかい"散乱のモデルが予言する割合 10^{3500} に1個という数字と対比される（Eisberg，1961，第4章）．

Rutherford は，もちろんこのような定性的な説明を超えて論じた．彼は硬い核の模型から期待される角分布を計算し，有名な $\sin^{-4}(\phi/2)$ の法則を得た．ここで ϕ は散乱角である．2年後，Geiger と Marsden (1913) は第二論文を公刊したが，それはこの予言とその他の散乱の特徴の長大かつ詳細な検証であった．彼らは観測した閃光と角度の関係を表の形にまとめ，次のように述べた．"表の第4列と第6列に，閃光の数と $1/\sin^4(\phi/2)$ との比が掲げてある．どちらの数字の組もほぼ一定であることがわかるであろう．"第4列は銀からの散乱，第6列は金からの散乱であった．彼らが角分布の曲線を描いていなかったことはいささか不思議だが，彼らにかわって曲線を描いてみると図1.1のようになる．これは彼らの銀のデータの一部である．

ほとんど同時に，当時のマンチェスターの Rutherford のグループにいた

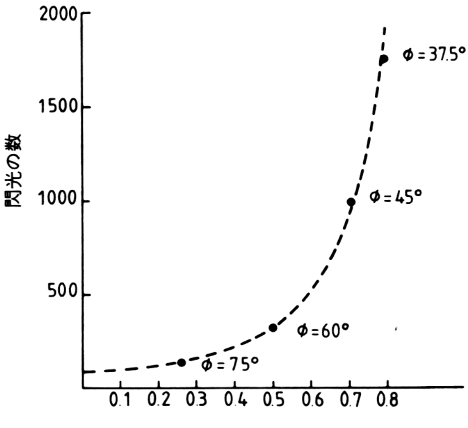


図1.1　Geiger and Marsden (1913) に報告された4つのデータを，散乱角 ϕ に対して閃光の数（銀箔によって散乱された α 粒子の数）を再録した図．曲線は $\phi=60°$ のデータ点にあわせた Rutherford の予言 $\sin^{-4}(\phi/2)$ である．

Bohr (1913) は，古典力学 (Rutherford の散乱の角分布を導くために用いた) と初期量子論の霊感的な混成に基づく力学，核を持つ原子の力学の有名なモデルを提唱した．よく知られているように，このモデルは水素の“分光学”の優れた説明を与えるのに成功した．図 1.2 (a) は水素のエネルギー準位のおおまかな構造を示す．基底状態はゼロ・エネルギーにとってあり，電子を遊離して原子をイオン化するしきい値はおよそ 13.6eV である．また図 1.2 (b) には 2 電子原子ヘリウムの低いエネルギー準位が示してある．

このような量子化されたエネルギー準位を検証することは，もちろん，もともと発光スペクトルの研究からはじまった．Frank と Hertz の実験 (1914) を発端として，新しい型の散乱実験，原子による電子の非弾性散乱によってエネルギー準位はさらに確認された．図 1.3 に典型的な実験結果を示す．散乱された電子の相対的な個数が，散乱された電子のエネルギーに対して描いてある．200 eV の山は弾性散乱に対応する．このエネルギーは入射のエネルギーだからで

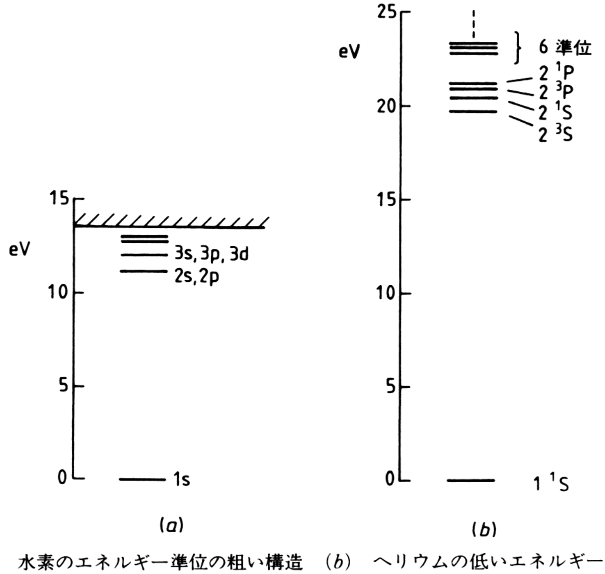


図 1.2 (a) 水素のエネルギー準位の粗い構造 (b) ヘリウムの低いエネルギー準位の粗い構造

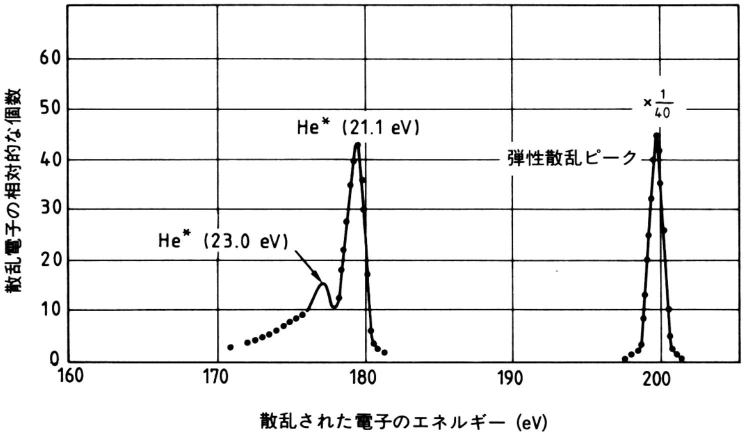


図 1.3　ヘリウム原子による弾性および非弾性電子散乱．French and Taylor (1978) の図 1.13 より転用．

ある．180 eV のちょっと下の山は，入射電子が 21 eV のエネルギーをヘリウムの原子に与え，それによってヘリウムを励起レベルのはじめのグループ(図 1.3 では分解されていない)に持ち上げる過程に対応する．同様に，ほぼ 177 eV の山に 23 eV 付近の状態の励起に対応する．

1920 年代の量子力学の展開により，このようなスペクトルは原子のなかの軽い構成要素，すなわち電子による内部励起（振動および回転）によって定量的に理解されはじめた．電子の空間分布も X 線によって写像され，典型的には数オングストロームの程度の大きさに広がっていることがわかった．不確定性原理は，電子がこのくらいの長さに閉じ込められるときの波長の評価を与え

$$p \sim \hbar/10^{-10}\,\mathrm{m} \sim 2\,\mathrm{keV}/c$$

(電子に対しては $mc^2 \sim 0.5$ MeV だから) $v/c \sim 4\times10^{-3}$ となる．したがって原子構造の主な特徴は，点状の電子が電子どうし，および点状の原子核と Coulomb 力によって相互作用を行うとして，非相対論的量子力学によってよく記述される．

1.2.2 原子核から核子へ

しかし核は本当に点状であろうか．加速器の技術が進むにしたがい，より高いエネルギーあるいは運動量を持つビーム（粒子束）が得られるようになった．これは de Broglie の関係 $\lambda=h/p$ によると，ビームの分解能力がより細かくなることを表す．そして荷電粒子の散乱に対する Rutherford の式（アルファ粒子も核も点状と仮定する式）からのずれの測定にかかりはじめた．もっとも精細な一連の実験は，Hofstadter とその協力者が 1950 年代に SLAC（スタンフォード線型加速器センター）において行った．アルファ粒子と原子核の間の強い相互作用はあまりよくわかっていないので，面倒なことが起こる．それを避けるため Hofstadter たちは電子のビームを用いた．図 1.4 は 126 MeV の電子が金の原子核から弾性的に散乱されるとき，その角分布が"点状の原子核"の予言

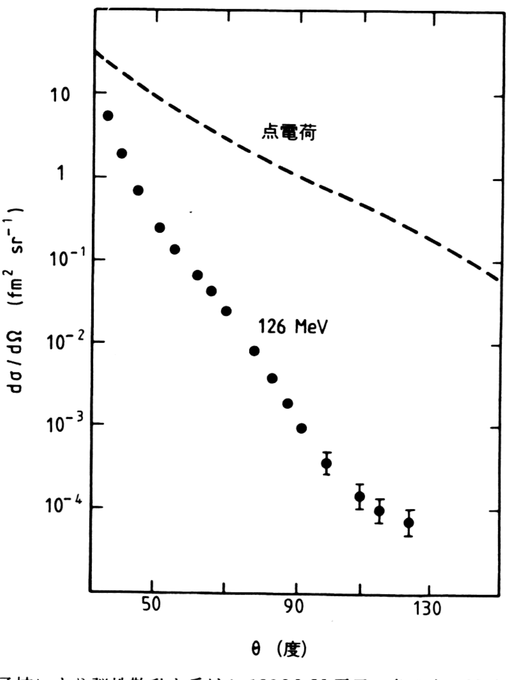


図 1.4 金の原子核により弾性散乱を受けた 126 MeV 電子の角分布．Hofstadter (1963) よりとった．黒丸は実験データ，破線は"点原子核"の場合の予言を表す．

より下に出ることを示す．定性的に言えば，これは原子核の有限な体積にわたっての波動力学的効果からくる．観測された分布は，2つの因子の積である．第一の因子は単一の点状の標的による散乱（相対論的運動学，量子力学，電子のスピン，標的の反跳などに対する補正を施して Rutherford の式を一般化したもの）に対応する分布である．一方，第二の因子は形状因子と呼ばれ，標的の電荷分布の空間的な広がりによって定まる因子である．図 1.5 はこのような電子の弾性散乱のデータ (Hofstadter, 1963) から抽出された $^{12}_{6}C$ の電荷分布を示す．この原子核は半径およそ 1～2 fm (1 fm＝10^{-15} m) を持つことが明らかである．質量数Aの重い原子核では，荷電半径はほぼ $A^{\frac{1}{3}}$ fm である．

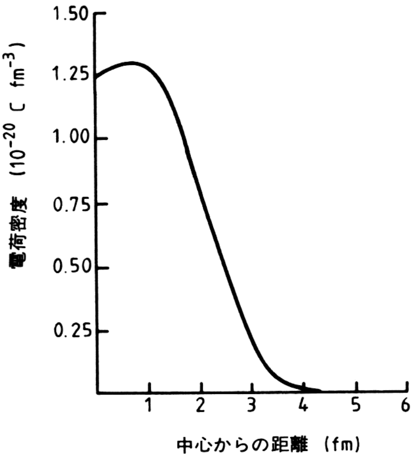


図 1.5　電子散乱のデータ (Hofstadter, 1963) から抽出した $^{12}_{6}C$ 核の電荷分布

原子核が有限の空間的広がりを持つことは，すでにそれが構造を持つことを表す．原子の場合と同じように，原子核による電子の非弾性散乱は，原子核が量子化されたエネルギー状態の系列のどれかに励起されうることを示す．図 1.6 は，入射エネルギー 150 MeV の電子が炭素によって 90° の方向に散乱されるときのエネルギー・スペクトルである．一番めだつ弾性散乱の山に加えて，3 個の他の山が見られる．これらは，反跳の補正を加えたうえで，電子のエネルギー損失がそれぞれ約 4.4 MeV, 7.7 MeV および 9.6 MeV に対応する．このエネル

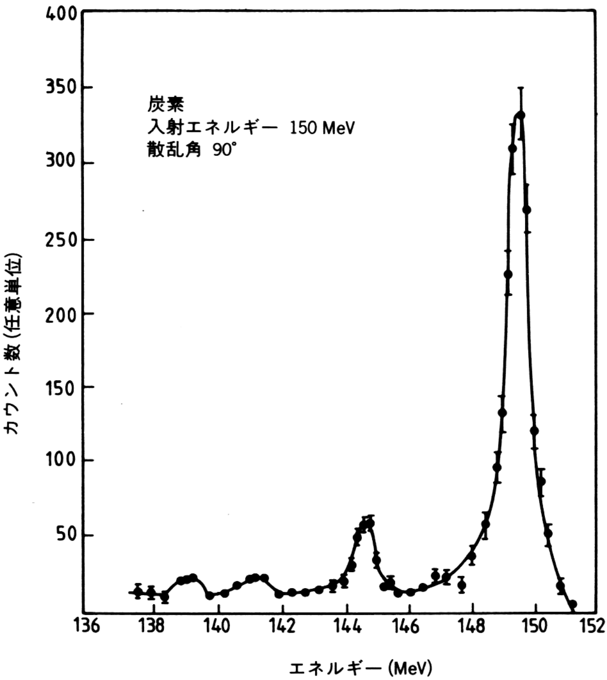


図 1.6 炭素原子核による電子の弾性および非弾性散乱 (Fregeau and Hofstadter, 1955)

ギーは, 図 1.7 にまとめてあるような別の独立な分光学的研究によって見いだされた最初の 3 個の励起状態に対応する.

明らかに原子核は, 数 fm 程度の大きさのなかに分布している構成要素を含み, その量子化された内部運動が, 数 MeV の程度のエネルギー差を含む原子核のスペクトルとなって観測されるはずである. 1932 年の Chadwick の中性子の発見は, よい近似で, 原子核の構成要素は中性子と陽子(一括して核子と呼ぶ)であることを確立した. 中性子は電気的に中性であるから, 核子を原子核の中に束縛しておくためには, 原子核の大きさの領域にわたって, 新しい力が働いていなくてはならないことは明らかである. この力は, 典型的な"不確定性原理に基づく"エネルギーとつり合わなくてはならないから, 電磁力よりずっと強いはずである. M を核子の質量, R をほぼ 1 fm とすると, 閉じ込めのエネ

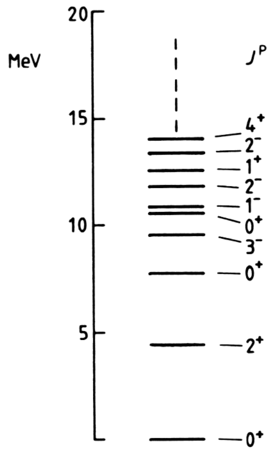


図 1.7　$^{16}_{6}$C 核のエネルギー準位

ルギーは，

$$\frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{R}\right)^2 \sim 20\ \mathrm{MeV}$$

であるが，この距離での2つの陽子間の斥力ポテンシャル・エネルギーはこの値のほぼ1/10である．しかしながら，20 MeV の運動エネルギーは核子の静止エネルギー 940 MeV に比べて十分小さいから，核子は非相対論的に運動する．

もっとも重要な定性的な論点がこれで明らかになった．大きさとエネルギーの尺度が原子と原子核とで，まったく異なるのである．原子を励起するエネルギーは，一般に原子核を励起するには不足である．したがって原子核は，原子の中の不動の小さな芯のように見え，しかるべき高エネルギーのビームによって励起された時にのみ，その内部構造を現すのである．原子核の自由度は，原子物理学の尺度では“凍結”されている．

核のスペクトルのもう1つ詳細な点は注目するに足る．図 1.8 (a) ~ 1.8 (c) から，Coulomb エネルギーの違いを考慮すれば，陽子を中性子に置き換えただけ（あるいはこの逆）の差しかない核同士のスペクトルが，極めてよく類似していることがわかる．図 1.8 (a) には“鏡像核”の実例を示した．ここには，Z

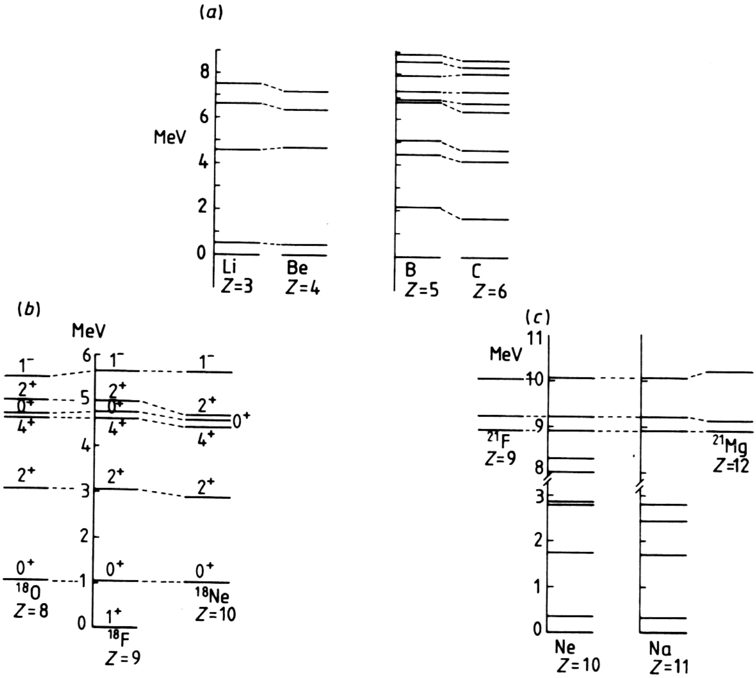


図 1.8 Coulomb エネルギーおよび中性子・陽子の質量差を補正したのち，同じ質量数で異なる電荷を持つ原子核のエネルギー準位を比較した図．(*a*) “鏡像”をなす二重子，(*b*) 三重子，(*c*)二重子と四重子

個の陽子と N 個の中性子を持つ核と，N 個の陽子と Z 個の中性子を持つ核とを比較している．図 1.8 (*b*) では，^{18}F の最低 (基底) エネルギー状態は，^{18}O や ^{18}Ne では Pauli の原理によって排除される状態に相当する．それは 1 つ残った ^{18}F の n−p 対が n−n 対や p−p 対に置き換わるからである．この点を別にすれば，3 個の “アナログ” 核の準位は非常によくあっている．図 1.8 (*c*) は質量数 21 の 4 個の核のエネルギー準位がほとんど一致する例を示した．$^{21}_{10}$Ne と $^{21}_{11}$Na は鏡像核の対であるが，ある励起エネルギー以上では，$Z=9$ と $Z=12$ の隣り合う原子核の状態にも対応する．図 1.8 (*a*) のように対応する準位を持つ一対の原子核は，二重子を作るといい，図 1.8 (*b*) のような 3 個の原子核は三重子，図 1.8 (*c*) のような 4 個の原子核は四重子を作るという．たとえ Chadwick の発見に

頼らなくても，これらの図から，原子核は2種類の基本粒子から成り，1つは電荷を持つが他は中性で，それらの間の力は電荷にはほとんどよらない，ということが明らかである．次の節でもこのような議論を用いるが，このような荷電多重子の数学は第8章で取り扱う．

1.2.3　核子からクオークへ

核子は点状であろうか．大筋を言えば，まことに顕著なことだが原子と原子核について略述した物理像をそっくり繰り返せばそのまま答になる．まず第一に，1960年代にHofstadterとその協力者の行った核子による電子の弾性散乱の実験(Hofstadter，1963)は陽子も明確な形状因子を持ち，自乗平均半径が約0.8 fmのほぼ指数型の電荷分布を持つことを明らかにした．核子の磁気能率もまた空間分布を示し，全体の大きさ（積分量）$\mu_{\rm p}$，$\mu_{\rm n}$で測ると，陽子・中性子の磁気能率の分布は，陽子の電荷の分布とほぼ同じ分布を持つことがわかった．(Perkins，1987，6．5節参照)これらの分布関数は距離にして0.04 fmの程度，核子への運動量移行が5 GeV/cの程度までよく測定されている．

原子や原子核の場合と同様，電子の弾性散乱で測定された明確な空間的広がりがあることは，すでに核子が無構造ではないことを示す．原子や原子核の場合と同様それ以上の情報は，電子の非弾性散乱を研究して，核子分光学の印があるかどうか見ることである．核子の準位は，構成要素の内部運動として解釈できるであろう．図1.9は，入射エネルギー4.879 GeVの電子が，陽子から10°の方向に散乱されたときのエネルギー・スペクトルである．再び，いつもの弾性散乱の大きな山（反跳効果によって4.879 GeVよりずれている）があるが，おそらく反跳系（核子）の励起に相当するほかの山があることが明確に示されている．しかし，図1.9の詳細な解釈は極めて複雑である．ある場合には数個の励起された状態が“ただ1つ”の山に寄与しているかもしれず，また一見無構造に見える部分にも，いろいろな構造が隠されているかもしれない．弾性散乱の山の次の$E' \sim 4.2$ GeVの山（これは反跳系のエネルギーで約1.23 GeVにあたる）だけが，簡単に解釈できる．これは早くから確認された$\pi-N$散乱の共鳴状態に正確に対応し，記号Δ(Perkins，1987，4．9節)で表される．この特別な状態は4つの電荷の組み合わせのどれにでも現れ，実験でできるπN系の

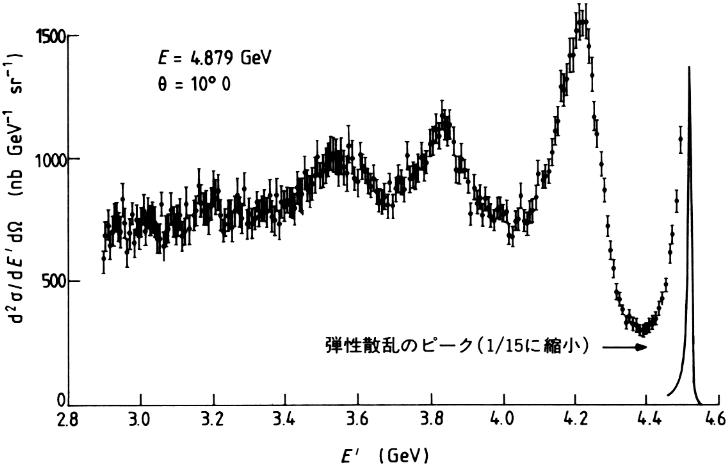


図 1.9 陽子による電子の弾性および非弾性散乱(Bartel *et al*., 1968). E および E' は入射および散乱電子のエネルギー

チャンネル π^+p, $\pi^+n\,(\pi^0p)$, $\pi^-p\,(\pi^0n)$, および π^-n に対応する.

図 1.9 のようなスペクトルを解読することは, 1960 年代および 70 年代に行われたバリオン分光学の分野のより注意深い実験によって行われた. 解析全体の結果は, 原子の場合に確認されたスペクトルによく似た, また原子核の場合はさらによく似た細かな準位の系列をあらわにした. 結果の一部は図 1.10 (a) および図 1.10 (b) にまとめてある. 図 1.10 (a) の準位の系列は, 2 つの電荷の系列 (荷電 1 および中性) として表れ, 陽子および中性子を基底としている. 1.5 GeV 付近の 2 つの隣接した状態は, 図 1.9 の $E'=3.8$ GeV の山に対応する. (しかし図 1.9 では, 図 1.10 (a) の約 1.4 GeV 付近の準位は影も形も現れていない!) この系列は原子核物理の 2 重項系列, 図 1.8 (a) に非常によく似ている. 図 1.10 (b) に示すもう 1 つの系列は, 4 つの電荷の組み合わせとして現れ, Δ を基底粒子とする. これは図 1.8 (c) で 4 重項と呼んだものを思い起こさせる. これらはすべて観測された核子のような励起状態であることは注目に値する. 例えば, 荷電 3 を持つ状態は観測されていない.

中間子にもまた, 多重項が存在する. 湯川 (1935) によりはじめて予言され

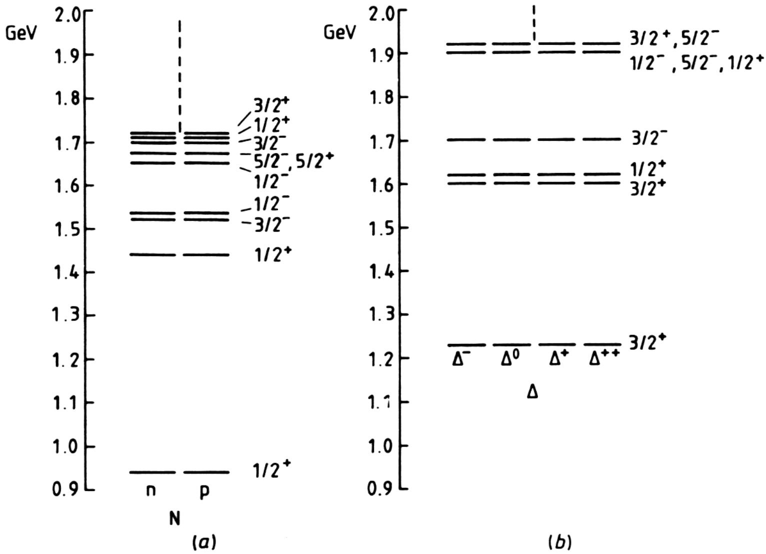


図 1.10　バリオンのエネルギー準位　(*a*)　二重子（N 系列）　(*b*)四重子（Δ 系列）

た短距離の核力場の量子(1．3 節参照)として，パイオンはとうとう 1947 年に発見された．1960 年代に，さらにパイオンは励起状態の系列の基底状態にすぎず，図 1.11(図 1.8(*b*)と比較せよ)のような荷電多重子を成すことが判明した．

中性子・陽子・パイオンのこの簡単な世界とその励起状態は，残念なことに現実の一部でしかない．余分な複雑さについては 1．4 節で後述する．なお，Perkins (1987) を参照するとよい．しかし，主要な論点を支える証拠は一部分であるが十分に示したと思う．再び複合系の構成要素の内部運動の励起を見ている，という結論は避け難い．この線に沿った特定の模型は，1964 年に Gell-Mann (1964) と Zweig (1964) によって独立に提唱された．多少異なった（そしてより少ない）証拠に基づいた議論であったが，彼らの示唆するところは本質的に正しいことがわかっている．彼らは，Gell-Mann がクオークと呼んだスピン 1/2 の構成粒子 3 個から核子類似の状態が作られ，中間子はクオークと反クオークの束縛状態であると考えた．これらの状態はまとめてハドロン

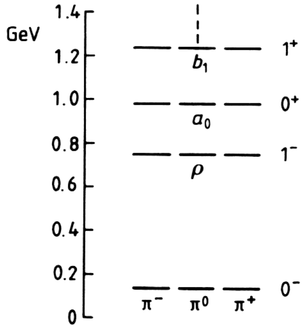


図 1.11　中間子の三重子

（強粒子）と呼ばれている．原子核の場合と同様，図 1.10 および図 1.11 に示されているハドロンの荷電多重子のもっとも簡単な解釈は，これらの状態が電荷 1 単位だけ異なる 2 種類の構成粒子からできているとすることである．しかし，例えば陽子自身は 1 単位の電荷を持つから，構成粒子は分数の電荷を持たなくてはならないように見えるであろう．もっとも経済的な（簡単な）とり方は，2 つの構成粒子がそれぞれ電荷 $2/3e$，$-1/3e$ を持つとする方式で，これらを“上向き（up）”クォーク u，“下向き（down）”クォーク d と呼ぶ，陽子の準位系列は（uud）系の状態であり，中性子は（udd），Δ^{++} は（uuu），π^+ は（$u\bar{d}$）の状態である．（Δ^+ の系列は (uud) 系の波動関数の細かな形で陽子の系列と異なる.）図 1.10，図 1.11 に示されている多重子構造を導くためには，u，d 間の力は荷電不変性を持たなくてはならない．

ここで，原子核のエネルギー準位の差は，典型的に MeV 単位で測られることを思い出そう．したがって原子核の現象の大部分では，中性子や陽子は励起されないで基底状態に止まる．ハドロンの励起は典型的に 100 MeV の程度である．原子物理の世界で原子核の自由度が凍結されているのと同じく，核物理の世界ではハドロンの自由度は大きく“凍結”されているのである．ハドロンの準位は大きさとエネルギーの尺度のどちらから見ても原子と原子核ほど判然と分離してはいないが，原子核の準位と実効的に分離されている．したがって原子核物理はなかば自立的な分野になっている．

クオーク仮説は，後になってふりかえると“自明”であったにもかかわらず，多少の注目すべき例外を除いては — 例えば Dalitz (1965, 1967) — 1970 年代のなかばまで，多くの研究者はあまり熱心でなかった．これからあと議論を進めるにつれて，この仮説を警戒するような理由もだんだんわかってくるであろう．しかしながら，きわめて簡単な“殻模型”近似によって，すべての既知のハドロンのスペクトルを，(qqq) および $(q\bar{q})$ の物理像でよく記述することができる (Isgur and Karl, 1983)．のちに 15．4 節で見るように，問題はこれをどう QCD と関連させるかにある．

核子の分光学的データは，構成粒子の存在の間接的な証拠にすぎない．何か直接にクオークを“見る”方法はないのであろうか．ここで当然ながら初期の Rutherford 流の実験を思い出す．そこでは原子の中の原子核の存在が，大きな角度の方向に予期以上の大きな数の粒子が散乱されることから推定されたのであった．核子の構造をこの方法で探ろうとするとき，α 粒子は便利でない．α 粒子が核子と強い相互作用をするため，散乱データの解釈が複雑になるからである．そのかわり，よく知られた電磁力によって相互作用する電子が用いられる．図 1.12 は，非弾性電子散乱の測定（図 1.9 では $\theta=10^\circ$ に対して示してある）を大きな散乱角にまで拡張をした結果である．弾性散乱の山の高さは，核子の形状因子（原子核の場合の図 1.4 および図 1.5 を参照せよ）が指数関数的に減少するから，急激に低くなる．ほかの明確な山についても同様であり，核子のはっきりした励起状態は，一定の空間的な広がりを持つことを示す．しかし，もっとも大きなエネルギー移行の領域では，何か劇的に新しいことが起こっている．曲線は角が増えても減少しない．これは図 1.12 に図示してある．言いかえれば，エネルギーの移行が十分大きくなると，電子は逆の方向にも容易に散乱される．これはまさに Geiger と Marsden の α 粒子と同じふるまいであり，核子が“堅い”構成粒子を含むことを示唆する．第 7 章で深非弾性散乱の実験を技術的に詳細な点まで含めて解析し，実験がスピン 1/2 のハドロンの構成粒子の存在を示すこと，構成粒子は現在まで検証しうる限り点状（大きさがない）であること，構成粒子はハドロンの分光学で仮定されたクオークのほかの属性を持つこと，を示そう．

1960 年代から 70 年代初期にかけて，散乱および分光学のこのたぐいの証拠

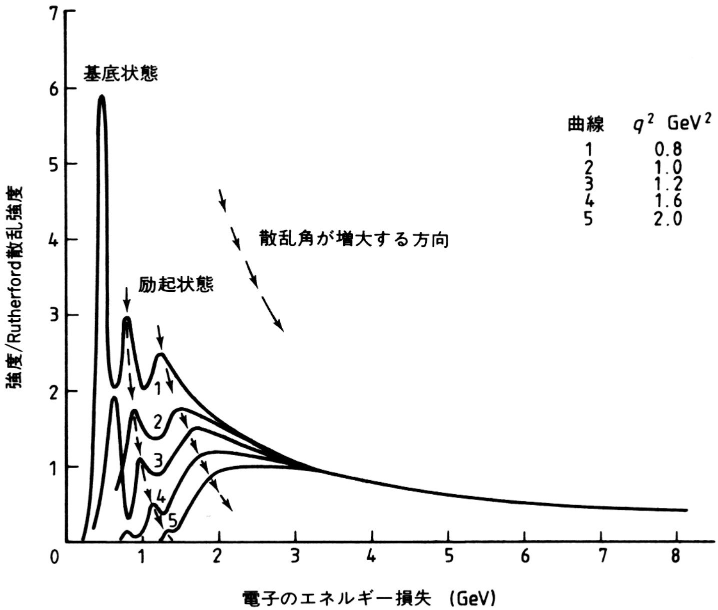


図 1.12　電子・陽子非弾性散乱の断面積．4 元運動量移行の不変積 q^2 のいろいろな値に対し，エネルギー移行 ν の関数として描いた．散乱角が増えると q^2 も増える (D. Perkins, 高エネルギー物理学入門第 1 版，Addison-Wesley (1972))

は山をなすほど集まったが，当時の大多数の研究者は，クオークを巨大な量の複雑なデータを系統的に整理するのに有用な工夫であるとみなし，真の物理的実在とは考えていなかった．いまここで直面せざるをえないその懐疑論の 1 つの理由は，物質の階層の議論の新しい大切な転機になっている．Gell-Mann は 1964 年の論文を次のような見解でしめくくっている．“最もエネルギーの高い加速器を用いて，電荷 −1/3 か +2/3 の安定なクオーク，あるいは電荷 −2/3, +1/3, +4/3 の安定な二重クオーク (di-quark) を探すこと，それは現実のクオークが存在しないという保証をうるのに役立つであろう．”

実際，ただ 1 つ可能性のある例外 (La Rue *et al*., 1977, 1981) を除いて，この “保証” はみごとに与えられた．原子や原子核の構成粒子とは違って，クオークはいまだかつて自由に遊離された粒子として観測されたことはない．現

在与えうる限りの最高のエネルギーを持つハドロンが互いに衝突すると，ビームの下流で観測されるのはたくさんのハドロンばかりで，分数の電荷を持つクオークではない．クオークのこの新しいふるまい — ハドロンのなかに集まっている時はまったく実在するように見えるが，遊離しては見えない性質 — は，クオーク間の力（QCD）の本質にある，と信じられている．この力については1.3節で再びふれ，第9章と第15章で詳しく論ずる．現在における統一見解は，QCDによるクオークの“閉じ込め”，すなわちクオークは遊離した単独の粒子としては存在せず，ハドロンの体積の中に閉じ込められた群としてのみ存在するという主張を認めるものである．

クオークの存在を実体化するのみならず，クオークとレプトン間の顕著な類似性を示す実験事実を次に提示して，“準位”に関するこの節を終えよう．両者の類似性は，クオークとレプトンがたとえ“基本的”でなくとも，少くとも，構造の共通な段階で自然の要素として考えうることを示唆している．

1.2.4 クオークとレプトン

おおかたの懐疑論は，1974年の“11月革命”，すなわち中間子のスペクトルの新しい系列 ψ/J 粒子の発見によってぬぐい去られ，クオークの実在説へ傾いた(Aubert *et al*., 1974, Augustin *et al*., 1974)．疑いもなく，これらの準位はフェルミオン・反フェルミオン系の状態に特有な量子数を持っていた．実際，ψ/J 粒子のスペクトルは $(c\bar{c})$ 系の状態としてよく記述できる．ここに c は“チャーム”クオーク（1.4節参照）と呼ばれる新しい型のクオークである．(e^-e^+) 系がポジトロニウムと呼ばれる類推から，$(c\bar{c})$ 系は現在“チャーモニウム”と呼ばれている．図1.13に示すように，この類推はたんなる外面上のものでない．エネルギーの尺度に 10^8 の桁の違いはあっても，スペクトルはまったく驚くほど似ている．(e^+e^-) 系は電磁的に相互作用をしてポジトロニウムを作るが，$(c\bar{c})$ 対は強い（QCDの）相互作用でチャーモニウムを作ることを考えれば，驚きは一層大きくなる．

この例からすでに明らかであるように，クオークとレプトンの間にありうる類似性を論ずるとき，その間に働く力に触れずにいるわけにはいかない．実際，物質の要素の構造について論ずるときは，その要素の存在を証明する力の理論

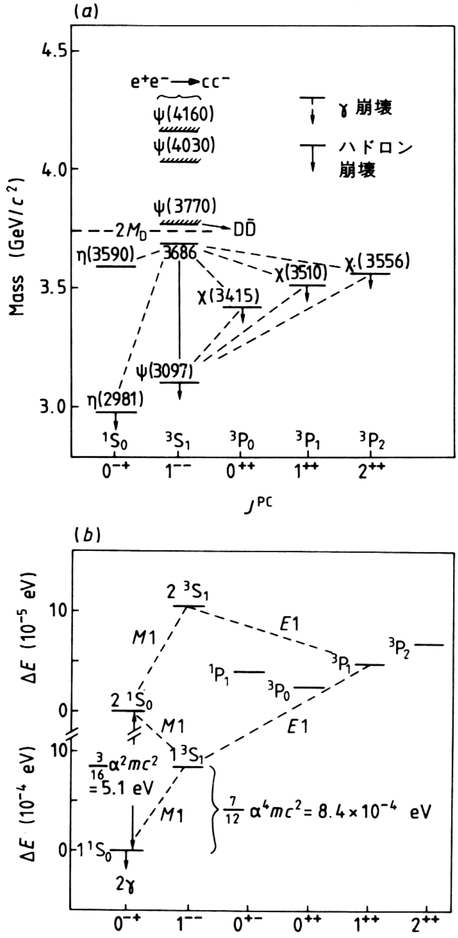


図 1.13　粒子・反粒子束縛系のエネルギー準位　(*a*)　チャーモニウム ($c\bar{c}$)　(*b*)　ポジトロニウム (e^+e^-)
(D. Perkins，高エネルギー物理学第 3 版，Addison-Wesley (1987))

と結びつかざるをえない．(1．2．3 項において，核子の構造をあきらめるとき α 粒子でなく電子を用いたことを参照) しかし一切のことを一挙に論ずることはできないから，力の議論は次の節で行う．ここでは，ハドロンの中にクオー

クが存在する別の証拠と，強い（QCD の）力と電磁力との顕著な類似性について，話を続けよう．

再び“Rutherford の計画”に戻ろう．核子からの大きな角度，大きなエネルギー移行の電子散乱が，比較的大きい断面積を持つことは，“堅い”構成粒子が存在する証拠であることを述べた．それでは 2 つの核子を衝突させたらどうであろうか．核子が“軟らかい”模型では，観測にかかる生成物の数は，ビームの方向に対する角度の関数として劇的に減少することが期待される．一方“堅い”模型では，構成粒子間の衝突に対応して，目だった現象は大きい角度で起こる．しかし，“反応生成物”とか“事象”とは一体何であろうか．例えば，それぞれの核子の中のクオークどうしの高エネルギーの衝突の結果は，クオークを大きな角度で散乱させるだけであろう．しかし，クオークは自由な遊離した粒子としては観測されないことを見てきている．実は，詳細はまだよくわかっていない過程によって，堅い散乱をした 2 つのクオークは，2 つのほぼ反対方向に射出されるハドロンの“ジェット（噴流）”に転化する．これらジェットの存在とその角分布は，クオークとその相互作用とを結びつける間接的な別の証拠となる．これについては第 7 章と第 9 章である程度詳しく論ずる．

ここから先は，予告に止めておこう．ハドロンの衝突における堅い散乱は，はじめ CERN（欧州原子核共同研究機関）の $p\bar{p}$ 衝突型加速器を用いた実験で明確に観測された．これは 1980 年初期，当時得られるもっとも高いエネルギーと運動量移行を与えることができたからで，こうしてハドロンの中のもっとも小さな距離の尺度を明らかにすることができた．図 1.14 は，CERN の衝突型加速器の $p-\bar{p}$ ビームに対して大きい角で形成されるハドロン・ジェットの断面積を，ジェットの持つ全横エネルギーに対して描いたものである．細かい点に触れなくても（9. 4 節参照），大きな横エネルギーは大きな散乱角に対応することは明らかである．図の破線は，p と $\bar{p}$ の“軟かい”模型の予言で，Thomson の原子模型のように指数関数的に減少している．データは，大きい角度の所で明らかに何桁も予言と違っており，Geiger と Marsden の実験のときと同じようである．さらに，2 つのジェット事象の実際の角分布をとってみると，ほとんど正確に Rutherford の曲線と一致してしまう．図 1.15 は，2 枝ジェット事象の角分布と，図 1.1 の Geiger-Marsden のデータの目盛を再規格化して（散乱角

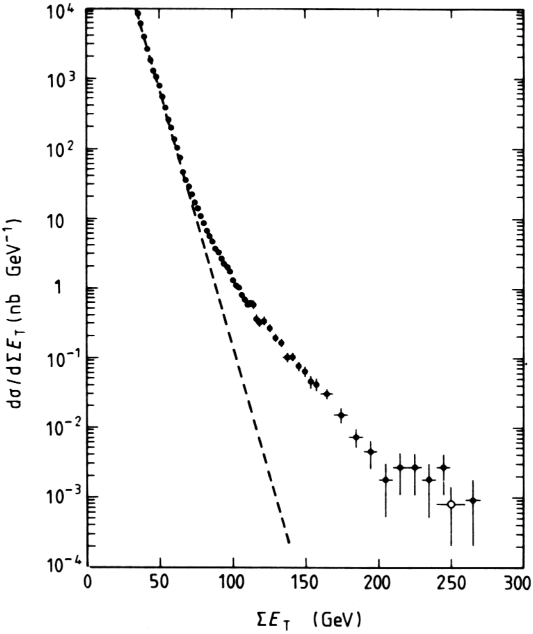


図 1.14 UA 2 中央検出器で観測された事象を全横運動量 $\sum E_{\mathrm{T}}$ の関数として表した分布.
(DiLella, 1986)

は ϕ でなく θ とおいている）一緒に描いたものである．おそらく，図 1.15 でもっとも顕著なことは，2 つのジェットの角分布の様子が，Geiger-Marsden の分布とこんなにもよく似ていることである．ジェットの角分布は，構成粒子間のもともとの強い相互作用による結果であり，Geiger-Marsden の分布はもちろん，原子核同士の電磁的相互作用による“Rutherford 散乱”によって決まる．この結果は，すでに図 1.13 で暗示されたように，強い力と電磁力の間の深い類似性を，劇的に確認したことになる．実際，“QCD の主要項の桁”と記されている曲線は，Rutherford の計算の強い相互作用の場合にあたる一般化であり（第 9 章で学ぶ），この図では Rutherford の形 $\sin^{-4}(\theta/2)$ とほとんど区別がつかない．

もともとのクオーク過程と関連したハドロンのジェットの明確な証拠は，少

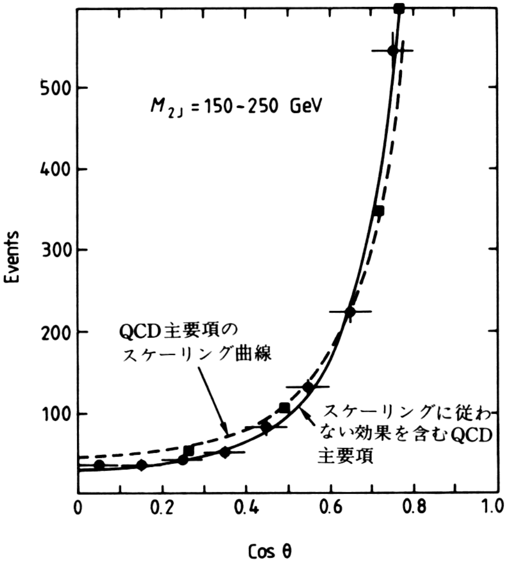


図 1.15　$p\bar{p}$ 衝突において，$\cos\theta$（θ は重心系の散乱角）の関数として描いた 2 枝ジェットの角分布（Arnison *et al*., 1985）．四角の点で示されるデータは図 1.1 の Geiger-Marsden の値をある共通の定数で尺度がえを行ったものである．破線は摂動論の最低次（第 9 章参照）から得られる QCD の予言であるが，Rutherford の形 $\sin^{-4}(\theta/2)$ とほとんど区別がつかない．実線はいろいろな補正を含む（第 9 章）

し違った種類の実験ではじめて見いだされた．この種の実験は今日，高エネルギー物理では極めて普通であるが今まで言及してこなかったもので，電子 e^- と陽電子 e^+ を正面衝突させるものである．（図 1.13 に示したチャーモニウムの分光学はこの実験でもっともよく研究された．）この粒子・反粒子対は消滅することができ，放出されたエネルギーはいろいろな形で再び物質化する．特に $(q\bar{q})$ 対が作られると，非常に大きな全エネルギー（例えば 100 GeV）を極めて小さい容積の中に集中させることができる．q と $\bar{q}$ が相互作用領域から飛び去るにつれ，QCD の“閉じ込め”の力が働きはじめ，（$p\bar{p}$ の衝突の時のように）q，$\bar{q}$ を 2 つのハドロンのジェットに転化してしまう．図 1.16 は（e^+e^-）消滅によるこのような 2 枝ジェット事象を表す．このようなハドロン・ジェットの角分布を調べると，非常に簡単な結果が得られる ― それはまさに，(e^+e^-) 系が消滅

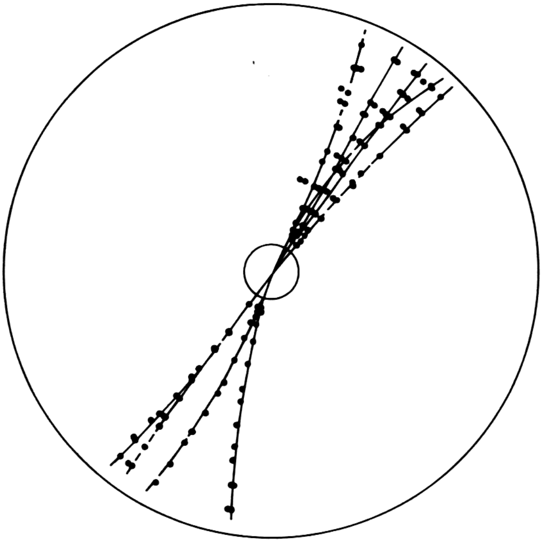


図 1.16　PETRA の e^+e^- の貯蔵リングの TASSO 検出器で観測された 2 枝ジェットの軌跡

して 2 個の点状のスピン 1/2 のクォークになったとして予言されるところと完全に一致する．これはのちに 7．5 節で論ずる．ハドロンのジェットは，最初の $(q\bar{q})$ 対によってすりこまれた分布の記憶をよく保存しているように見える．

クォークとレプトンが同じ基礎の上に立っているらしい，という証拠は，さらに弱い相互作用でも見いだすことができるが，その議論はここに述べるには技術的すぎるので第 10 章にまわす．これで物質と力の議論の他の半分に関連した主要な考えを紹介する時がきた．

1．3　理論の枠組：相対論的場の量子論における物質と力

古典物理学の世界では，物質と力は明らかに別物である．物質の概念は，巨視的な日常体験に基づいた直観的なものであり，一方，力の概念はそれほど直観的でない．物体間の接触力はたやすく納得できるが，ある距離を隔てて働くことができるように見える力は，そうでない．

“重力は物質に生得的に付随する本質的な属性であるとして，1つの物体が隔てた物体に真空中をなんら媒介するものもなく，力を及ぼすことができるという見解は，私にはあまりにばかげていると思われます．したがって，哲学的な問題についてしかるべき思索を行える人なら誰でも，この見解にくみすることはないと信じます（Newton から Bentley への私信）．”

Newton は2つの離れた物体間に重力を伝える納得できる機構や物理的模型を見いだすことができなかった．しかし彼の動力学の方程式は，いったん（説明のつかない）重力の法則が与えられると，強力な予言能力を持つ枠組みとなり，最終的にはたいていの人々を満足させたのであった．

19世紀に至り，より複雑な電磁力の法則の精密な定式化が行われた．ここでも再び，空間をへだてて力が及ぶ理論は避けられて，電磁力（および光）が伝わる方法として，幾多の力学的あるいは流体力学的な模型が提唱されたのであった．Maxwell は，力線に関する Faraday の経験的な考えに物理的･数理的内容を与えようと苦闘したときに，これらの模型をみごとに使いこなしている．Maxwell の方程式は，実はエーテルの力学的運動を記述するものであり，エーテルは驚くべき媒質で，渦やギアや遊び車などから成る，と一般にみなされた．しかし1864年の論文では — これは力線と電磁場に関する3番目でかつ最後の論文である — Maxwell 自身，力学的な足場を放棄し，場の方程式の最終的な構成を，それ自体として独立させる見解に立ったように見えた．のち，これらの方程式はラグランジアン（第4章参照）から導かれ，多くの物理学者は，この“一般化された力学”はエーテル模型のあれこれの一群よりはずっと満足できるものである，という点で Poincaréの思想に賛成した．いずれにせよ，同じ数学的方程式が，しかるべき解釈を行えば，質点やバネ･緩衝器やインダクター（誘導）・キャパシター（容量）・レジスター（抵抗）などの系を記述する．この段階を経て，力学の概念は新しい基本的な実在電磁場にまで拡張されたのであった．

空間を隔てての作用という矛盾は解決された．電磁場は帯電した，あるいは帯磁した物体の周囲のあらゆる空間に浸透し，局所的に物体に働き，その作用を光の速度で伝えて，場自身遠くの物体に作用を及ぼす．Maxwell の理論は，電気と磁気を統一するのみならず，光速度で空間を伝わるはずの電磁波の存在

を予言し，電磁波は1888年Hertzによって確認された．実際，光は電磁波の1つの形であった．

既述したように，1900年頃，“電気の粒子”— すべての帯電あるいは帯磁した物体の原型 — として電子が遊離された．電子はほとんど局所場の概念の中に包含されてしまうように見える．距離を隔てた作用という考え方を避けるには，電気の基本的担体は点状であるはずである．したがって場は，例えば電子の異なる部分に同時に働く，という必要はない．物質の基本要素が点状であるという性質は，それらの相互作用を引き起こす力の場が局所的であるという性質と直観的に結びついているように思われる．

古典物理が凱歌をあげてまもなく，もう1つの世界，量子の世界が現れてきた．はじめは光電効果により，その後かなりたってCompton効果によって，電磁波は何か粒子のような様相（光子）を持つことが，まぎれもなく現れてきた．ほとんど同じころ，直観的な物質像がまた崩れはじめてきた．電子のごとく粒子のように思われていたものが，波動のような性質（干渉や回折）を示した．このようにして，物質と力，粒子と場の間の概念的な違いが，もはや明瞭ではなくなってきたのであった．一方，場として扱われていた電磁力が今や粒子の様相を持ち，他方，粒子は今や波のような，あるいは場の様相を持つに至った．Feynman (1965) は彼の“物理学講義”第3巻の冒頭で，“電子はまるで光のようにふるまう”と書いている．

今まで論じてきた“点状の”の“局所的な”“粒子/場”という概念すべてを生かすような電子と光子の理論をどのようにして作ることができるだろうか．一見まったく簡単に見える過程，励起された原子の状態が光子を放出して自発的に崩壊する過程

$$A^* \to A + \gamma \tag{1.1}$$

を考えよう．普通の非相対論的量子力学は，この過程の第一原理による説明を与えることができない．非相対論的量子力学がふつう論ずる自由度は，“物質”粒子のみの自由度であって，この場合は電子の自由度のみである．しかし，場の自由度にも何か根本的な変化が起こったことは明らかである．左辺では，物質は励起状態にあり，電磁場はどこかに隠れている．右辺では，物質はエネルギーのより低い状態に遷移を行い，そのエネルギー差は電磁輻射の量子を1つ

創り出した．第4章で，場の量子論について初等的でかつそれ自身でまとまった紹介をする予定である．場は無限に多くの自由度を持ち，なにか振動する固体（単に極めて多くの自由度を持つだけだが）との類似で考えることができる，ということがわかる．(量子力学的)粒子の系がエネルギーの準位を持つように，場も明確に量子化された正確に定義できる状態として存在する．過程(1.1)においては，電磁場ははじめ基底状態にあり，物質の自由度からエネルギーを転移することによって励起状態に上げられる．励起された場の状態は，量子力学的に光子の存在で記述される．場の基底状態では光子は存在しない．

これらの考えは第4章で定式化する．ここでは，この過程を図で表すことに止める．この図は最終的に実際の式と関係がつくであろう．原子は素粒子ではなく，空間的な広がりを持っていることがわかっている．したがって電磁場は原子全体と局所的に反応することはできず，むしろ電子のようなただ1つの点状の源とある瞬間に作用をする，と仮定される．したがって過程(1.1)に起こっている基本的な過程は図1.17のように表すことができよう．この図から読み取れる決定的な考えは，電磁場の量子がある一点，電子がある瞬間にいる位置で物質化するということである．

しかし図1.17で過程(1.1)のすべての内容がつくされているはずはない．$e^- \to e^- + \gamma$ のような遷移は，自由な電子に対しては起こり得ないことが容易に確かめられる．エネルギーと運動量が保存し得ないからである（問題1.1(a)参照)．もちろん，実際は電子は原子の中に束縛されているのだから，束縛エネルギーの変化が，電磁場を励起し光子を創生するに足るエネルギーをまかなうのである．

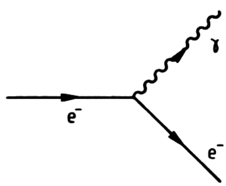


図1.17　局所的1量子放出過程により光子を輻射する電子

物質の波動性はすでに，例えば電子と光子をほとんど同じ立場に立って取り扱うことに対して，動機の１つになった．もう１つの動機は，相対論とのかかわりあいを考慮すれば，直ちに得られる．すでに見てきたように，物質をもっとも小さい距離の尺度で見極めようとするとき，実験は利用できるもっとも高いエネルギーで遂行しなくてはならない．粒子の静止エネルギーよりずっと高いエネルギーが問題になってくるとき，粒子の数は運動の恒量ではない．粒子を創生する過程，有名な $E=mc^2$ の関係によってエネルギーが物質に転化する過程がごく普通になってくるからである．例えば前の節で述べた電子のビームは，電子の静止エネルギー（$\sim 0.5\,\mathrm{MeV}/c^2$）より何桁も高いエネルギーを持っていたのである．したがって，光子のような場の量子が現れたり消えたりするのとまったく同じように，物質の自由度もまた変化する．すなわち，"物質"の粒子も量子場を励起する量子とみなさなくてはならない．このようにして，電子も光子も類似の方法で（ある重要な違いはあるが ― 第４章参照）記述される．

１つの光子はそれだけでは物質化することはできない．電荷は常に保存する（ように思われる）からである．しかしエネルギーと運動量の保存の法則が満たされれば，電子と陽電子の対（またはほかの粒子・反粒子対）をいつも創生することができる．これが起こる基本的な過程は再び局所的であると仮定され，図 1.18 で表される．しかし図 1.17 の場合と同様，図 1.18 でもそのままではエネルギーと運動量を保存させることができない(問題 1.1 (b) 参照)．そのかわりこの図は，図 1.19（反跳電子の付近におけるガンマ線による電子・陽電子対の創生）や図 1.20（原子核の遷移による光内部転換を起こして(e^+e^-)対を創生する過程）のような範囲の広い過程の一部とみなすことができる．

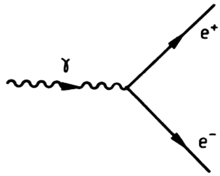


図 1.18　e^+e^- 対に壊れる仮想光子

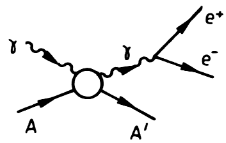


図 1.19　対創生過程

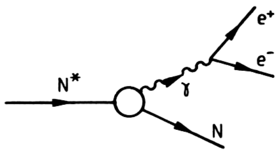


図 1.20　内部転換

図 1.17 の過程はそれだけでは起こらないが，図 1.21 に示すように 1 つの電子が光子を放出し，その光子が第二の電子に吸収される過程を想像すれば，起こり得る．なぜ図 1.21 は許容されて図 1.17 は許容されないのか．この答は，量子力学の基本的特徴によって与えられる．図 1.21 については 5. 6 節であからさまに論ずるが，量子力学の摂動論（付録 A,式(A.84) 参照）によれば，量子振幅は一般に“仮想的な”遷移を含む下部過程からの寄与を含むのである．仮想的な遷移とは，エネルギーが始め（あるいは終わり）の状態のエネルギーとは異なるエネルギーを持つ状態を含む遷移である．唯一の条件は，始めと終わりの状態ではエネルギーが同じことである．したがって，下部過程 $e \to e + \gamma$ や $e + \gamma \to e$ は，図 1.21 のようにエネルギーが全体として保存するかぎり，“仮想”遷移として起こることができる．したがって図 1.21 では，2 つの電子はいろい

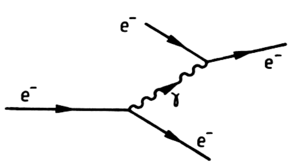


図 1.21　γ（光子）の交換による電磁相互作用の散乱

ろな量のエネルギーと運動量を交換し，それは1つの電子から他の電子へ光子によって“運ばれる”．一般に，運動量の変化は力の働きによると解釈されるから，電子同士は互いに力を及ぼしあった，と想像することができよう．“力”は“場の量子の交換”によるものである，という解釈は基本的に重要で，電磁場の場合は5．6節および5．8．2項で詳しく論ずる予定である．

図1.17から図1.21に至るような図形は，その発明者の名前にちなんで“Feynman図形”と呼ばれている．これら示唆に富む図形について一言しておこう．まず，単にある過程を絵で表した，ということ以上の意味がFeynman図形にはある．(しかし役に立つとは言え，誤りを誘うかもしれない，ということもある.) これらの図形の真の力は，第5章でまず触れるように，ある図形と，摂動論で計算される量子振幅の特定な数式表現の間に，正確かつ定量的な対応がある，ということである．したがって図形は，複雑な数式を考えるうえで，“視覚的補助”として大きな助けになる．

今まで電磁場だけを一般的な量子場の術語を用いて議論してきた．それでは電磁場の理論そのものの構造について何か特別なことがあるのだろうか．実はその通りである．第2章で見るように，これは対称性の議論に極めて強く制約されている理論である．この特別な対称性はゲージ不変性と呼ばれ，電磁場の理論はゲージ理論である．

ほかの力についてはどうであろうか．原子核のベータ崩壊は，図1.20と非常によく似た過程で起こる．放出される e^- は，e^+ の代わりに $\bar{\nu}_e$ を伴う．図1.22にこの様子を示す．しかしながら，この過程と図1.20の電磁過程の間には，詳細な点に関してはいろいろな違いがある．この場合，場の量子は W^- 粒子で，この粒子は光子が電磁力を運ぶのと同様，弱い力を“運ぶ”．しかし光子と違って，W^- は帯電しており (W^+ も存在して，例えば陽電子の放出を行う)，かつ質量が非常に大きい ($m_W \cong 82$ GeV$/c^2$)．Wのこの第二の性質は，実は弱い力がなぜ弱く見えるかという真の理由になっている．図1.22の過程は“極めて”仮想的である．部分過程 $N(A, Z) \to W^- + N'(A, Z+1)$ において，始めと終わりの原子核のエネルギー差はわずか数MeVであり，一方Wの静止エネルギーはおよそ82 GeVもある．式(A.84)によれば，このような2段階の仮想過程の量子振幅は，“中間”状態と始めあるいは終わりの状態のエネルギー差に反比例す

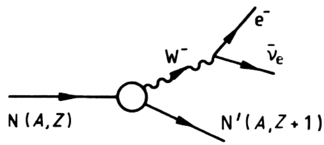


図 1.22　原子核の β 崩壊

る．この場合，中間状態はW粒子を1つ含み，このエネルギー差は原子核のエネルギー尺度にとって巨大である．したがって振幅は極めて小さくなり，崩壊率は非常に遅くなって，崩壊を起こす力は非常に弱いように見える．弱い力の“真の”強さの問題については，すぐ立ち戻って論ずる．

原子遷移(1.1)と同じく，弱い力の場も局所的に働き全原子核どころか全核子の容積全体にわたって働くとも考えない．したがって図1.22に寄与する真の“素”過程，あるいは中性子のベータ崩壊は，図1.23に示すようなものである．図1.24では，陽電子の放出が起こる．図1.21に類似する弱い散乱過程もまた存在し，例えば図1.25によって表される．

中性の粒子 Z^0（質量 93 GeV/c^2）によって伝達される別種の弱い過程もまた可能であって，その一例は図1.26に示してある．弱い相互作用の現象学を完全に論ずることは第10章から第12章に譲る．電弱理論は第13章と第14章で展

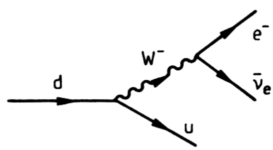


図 1.23　クオークの β^- 崩壊

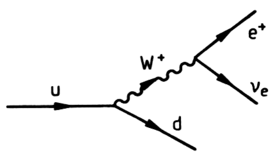


図 1.24　クオークの β^+ 崩壊

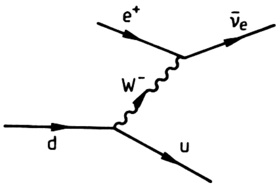


図 1.25　W 粒子の交換による弱い相互作用の散乱

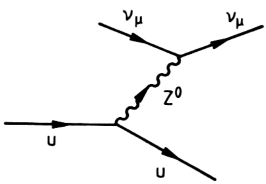


図 1.26　Z^0 粒子の交換による弱い相互作用の散乱

開する．

弱い力はそのみかけ上の“弱さ”にもかかわらず，電磁力との類縁性をある点で壊す．W および Z 量子の質量は，とても光子の質量に等しいとは言えないが，これら 3 量子のスピンはいずれも 1 である．さらに，W および Z 粒子を介してのクォークとレプトンの弱い相互作用は極めて類似しており，あたかも e^+ と陽子の電荷のように，実は同一である．“普遍性”として知られるこの性質は第 11 章で論ずる．第 12 章では，弱い相互作用もまた実際ゲージ理論で記述されるはずである，という議論を展開する．しかしこの場合は，第 13 章，第 14 章で説明するより巧妙な理論である．最後に，第 14 章でも論ずるように，弱い力と電磁力の固有の強さは実際よく似ている．こういう特徴はすべて“電弱理論”の中に組み込まれている．

クォーク間の強い相互作用がまだ残っている．1．3 項で注意したように（図 1.13 および図 1.15 参照），これらの図形もまた，QED に類似した点を持っている．クォークの強い相互作用（QCD）は，グルーオンと呼ばれる力の量子を交換して働く．グルーオンはスピン 1 で質量はないと信じられている．この点ではグルーオンは W 粒子や Z 粒子よりも光子に似ている．しかし，QCD の相互

作用の正確な形は，QEDに類似してはいるが，本質的にずっと複雑である．QCDは第8章と第9章で論ずるが，ここでは複雑になる本質的な理由に触れるだけにしよう．これは“荷量”の概念に結びついている．電磁場の場合，2つの粒子間の力はそれらの電荷により，1電気素量の簡単な整数倍（もちろんゼロも含む）で認識される．QCDでは“電荷”の概念は相当に拡張される（一般的に荷量と呼ぶ）．電荷から類推される属性は“カラー（色）”と呼ばれ，その名前の暗示するように，1つ以上の種類がある．クオークに関しては，それぞれのクオークが3種の“カラー変種”として存在し，例えば，u_r（赤い上向きクオーク），u_b（青い上向きクオーク），u_g（緑の上向きクオーク）という．QCDの力はこの“カラー”の違いに極めて敏感である．実際，グルーオンは図1.27の基本的なグルーオン交換の過程が示すように，実効的にクオーク間のカラーをあちらとこちらに“運ぶ”．

グルーオン自身がカラーを持つから，グルーオン同士も相互作用をする．おそらくこれがQCDとQEDの間の単独ではもっとも重要な違いであろう．QEDでは，光子は電荷を持たないから普通の電磁相互作用は起こさない．グルーオンもまたQCDによって閉じ込められ，したがってクオークと同じく，遊離した自由な粒子としては観測されないと信じられている．にもかかわらず，qや$\bar{q}$のとき起こったように，根元的な短距離離間の衝突過程で生成したのち，グルーオンは“ハドロン化”するように見える．第9章で見るように，このような“グルーオン・ジェット”はグルーオンの存在やその性質の間接的な証拠になる．

こうして，比較的簡単な全体像が現われはじめたようである．クオークはQCDの源になる基本粒子で，互いに結びついてハドロンを作る．電子やニュー

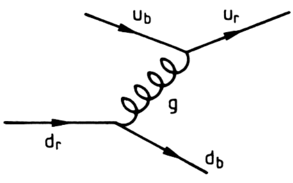


図1.27　グルーオンの交換による強い相互作用の散乱

トリノと同じく，クオークはスピン 1/2 を持つ．弱い相互作用はクオークとレプトンの対同士，クオークの二重子（u，d）とレプトンの二重子（ν_e，e^-）を含む．これらの対は弱い力の源であるように見える．4 つのフェルミオンの族 {(ν_e，e^-)，(u，d)} は基本的な“物質”のセットとなり，原理的には物質のほとんどすべての集合状態，原子から星や銀河まで説明するのに事実上十分である．（対応する反粒子は別の新しい種類とはみなさない．）“力”の面から見ればグルーオンは QCD の力の量子であり，$W^\pm$ 粒子や Z^0 粒子は弱い相互作用の量子であるが，これらの量子は光子と同じくスピン 1 を持つ．弱い力および強い力の場は電磁場の一般化であり，これら 3 種の場はゲージ理論の諸例である．（ひとこと挟んでおくと，重力（万有引力）はこの見地になじまない．重力の力の量子 ― いわゆる“グラビトン（重力子）”はスピン 2 を持つと仮定されている．）

引き続く 3 つの章の目的は，量子力学・相対論・場の理論を含み，今まで述べた事柄に沿って定量的な計算を行うに必要な数学的定式化を確立することである．その前に 1 つ，歓迎されざる親類たちについて述べておこう．

1．4　好ましくない紛糾

ごく大筋の事だけであるが，フェルミオン族 {(ν_e，e^-)，(u，d)} は電磁力・弱い力・強い力に対してそれぞれ適当な“電子成員”を含む証拠を示してきた．しかし，たいへん奇妙なことに，一見余分とも見えるようなこの族の“親類”がまたかなりの数存在する．歴史的に最初に発見されたのはミューオンであった（Street and Stevenson，1937，Anderson and Neddermeyer，1937）はじめミューオンは湯川（1935）によって仮定された“核力場”の量子であると考えられた．この粒子の交換によって 2 核子間の相互作用が説明された．湯川は交換される量子の質量を，関連する力の到達距離に結びつけて，定性的に予言した．この関係は，さらに第 5 章（5．8．2 項）で論ずるように，まったく一般的でかつ基本的に重要である．湯川の予言した質量の範囲は 100～200 MeV[†] であり，ミューオンの質量はほぼ 105.7 MeV であった．しかし Conversi *et al*.（1947）の実験は，強い核力場の量子ならば持つはずの強い相互作用を，

†（原注）　以下 $c=1$ とおいて質量をエネルギーの単位で引用する（付録 B 参照）．

ミューオンは持たないことを確認した．したがってミューオンはレプトンである．実際，ミューオンはまったく文字どおり“電子成員”である．どの点からみても，ミューオンは電子と完全に同じようにふるまう．電磁相互作用と弱い相互作用しか持たず，その基本的な相互作用の強さは電子と同じである．このような重複 — あるいはミューオンが事物の体制に占める“効用”については，ミューオン触媒融合反応（Bracci and Fiorentini, 1982, Jones, 1986）がエネルギー問題を解決するかもしれないということを除いては，誰も納得のゆく説明を与えてはいない．

湯川の量子は何であろうか．同じ1947年にLattesらはミューオンより少し重く，ミューオンに崩壊する粒子を発見した．このやや重い粒子は質量およそ140 MeVでパイオンと呼ばれ，強く相互作用することがわかって（Perkins, 1947, Occhialini and Powell, 1947）湯川の力を運ぶ粒子であると同定された．前節の議論で明らかになったと思うが，今日，核力の場は基本的な場とみなされておらず，したがってパイオンは“点状の量子”ではなく複合粒子である．にもかかわらず，核子・核子間の相互作用の長距離力の部分は，パイオンの交換によってうまく記述できることも，依然正しい（5．8．2項参照）．

パイオンのミューオンへの崩壊の平均寿命は10^{-8}秒の程度で，弱い相互作用の特徴（この位のエネルギーの放出に対して）を示す．ベータ崩壊のように，ミューオンの崩壊はニュートリノを伴う．

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{1.2}$$

これらの(反)ニュートリノは，ベータ崩壊のe^-に伴って出てくる(反)ニュートリノと同じであろうか．Danbyら（1962）による重要な実験は，そうでない証拠を見せた．ベータ崩壊の過程

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{1.3}$$

を考えよう．今はいささか不慣れであろうが，相対論的量子論へと読み進んでいけばだんだんそうではなくなる操作を用い，過程(1.3)が存在すればこれに関連した過程

$$e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu}_e \tag{1.4}$$

が存在することを推定できる．ここで電子を終わりの状態から始めの状態に陽電子にかえて移項した．この処置によって保存則はすべて満たされる．図1.25

は過程(1.4)が基本的レベルで寄与する一例である．また次の逆過程も推定できる．

$$\bar{\nu}_e + p \to e^+ + n \tag{1.5}$$

過程(1.2) により π^- が飛翔中に崩壊して $\bar{\nu}_\mu$ を放出したと考えよう．Danby ら (1962) は過程

$$\bar{\nu}_\mu + p \to \mu^+ + n \tag{1.6}$$

により μ^+ が創生されたことを見いだしたが，過程

$$\bar{\nu}_\mu + p \to e^+ + n \quad (\text{観測されず}) \tag{1.7}$$

による e^+ は発見できなかった．もちろん，“観測されず”とは実際には断面積の上限を意味する．しかし，過程(1.5) から過程(1.7) を受け入れるならば，一方において電子とそれに付随するニュートリノ，他方においてミューオンとそれに付随するニュートリノは，(少なくともよい近似で)まったく分離された一生を送り互いに混合し合わない，と結論せざるを得ない．実際，何ものかが，μ^- が e^- に過程

$$\mu^- \to e^- + \gamma \quad (\text{観測されず}) \tag{1.8}$$

により崩壊することを妨げている．この過程は図 1.28 に示してあり，図 1.17 と

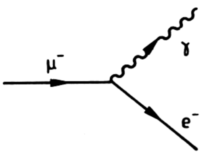


図 1.28 ミューオンの輻射崩壊（観測されていない）

まったく類似している．図 1.17 はエネルギー・運動量の保存(問題 1.1 (a) 参照)により実過程としては禁止されているが，図 1.28 の場合はあり余るエネルギーがある．実際，μ^- と e^- の強い類似性からすれば，必ず起こってしかるべきはずである．同様にして，対生成過程

$$\gamma + A \to e^+ + e^- + A' \tag{1.9}$$

$$\gamma + A \to \mu^+ + \mu^- + A' \tag{1.10}$$

は観測されているが，“混合”した場合

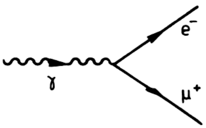


図 1.29　μ^+e^- “対” に壊れる仮想光子（観測されていない）

$$\gamma+\mathrm{A}\to\mu^++\mathrm{e}^-+\mathrm{A}'\ （観測されず） \tag{1.11}$$

は観測されていない．これは図 1.29 の基本相互作用が欠けていることを示す．

この考察の結論は，それぞれのニュートリノに “電子” と “ミューオン” のはり紙をして，レプトンのこの 2 つの型が混じらないという規則を立て，観測を体系的に整理することである．したがってミューオン自身のベータ崩壊

$$\mu^-\to\mathrm{e}^-+\bar{\nu}_\mathrm{e}+\nu_\mu \tag{1.12}$$

では，はじめ μ^- の帯びていたミューオン数は終わりの ν_μ に移行して保存され，e^- $\bar{\nu}_\mathrm{e}$ の電子数は互いに打ち消しあってしまう．

このようにして，第二のまったく別のレプトン二重子（ν_μ, μ^-）の存在を認めなくてはならない．それでは，クオークもほかに存在するであろうか．フェルミオンの第一の族 — 世代と呼ぶ — $\{(\nu_\mathrm{e}, \mathrm{e}^-), (\mathrm{u}, \mathrm{d})\}$ については，レプトンとクオークのそれぞれの二重子の間にある “平行性” があるかもしれないと暗示するところがある．二重子の 2 つの成員は 1 単位だけ異なる電荷を持っている．すべての力を最終的に統一する試みは，レプトンとクオークの間にある種の対称性を認める方向にある（第 15 章参照）．実際，別のクオーク二重子（c, s）が存在する．ここに c は電荷 2/3e の “チャーム” クオーク（1．2．4 項で言及した），s は電荷 −1/3e の “ストレンジ” クオークであって，両者は u，d クオークとまったく同じ電荷を持つ．この新しいクオーク二重子によって，フェルミオンの第二世代は $\{(\nu_\mu, \mu^-), (\mathrm{c}, \mathrm{s})\}$ となって完成する．

クオークの属性 “チャーム” と “ストレンジネス” は，さきほどレプトンに与えた経験的な量子数と多少類似している．ストレンジネス量子数が必要なことは 1950 年代に明らかになった．霧箱（のちには泡箱）の中で次のような反応が起こっていることが確認された．

$$\begin{array}{l} \pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{x}^0 + \mathrm{X}^0 \\ \quad\quad \mathrm{X}^0 \rightarrow \pi^- + \mathrm{p} \\ \quad\quad \mathrm{x}^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \end{array} \tag{1.13}$$

図1.30はこのような過程の一例である．図1.30 (b) に再構成した図で，2つの破線は2つの中性粒子 x^0, X^0 を表す．これらの粒子は図1.30 (a) ではイオン化による飛跡を残しておらず，その崩壊様式 $\mathrm{x}^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, $\mathrm{X}^0 \rightarrow \pi^- + \mathrm{p}$ によって検出される．これら崩壊生成物の運動量を測って，x^0 と X^0 の質量はそれぞれおよそ500 MeVおよび1100 MeVであることが見いだされた．これら新しい粒子の奇妙な特徴は，このような衝突で両者はつねに相伴って生成され，単独では決して創られないことである．例えば，一見まったく可能に見える（しかもエネルギー的にはさらに有利な）過程

$$\left.\begin{array}{l} \pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{x}^0 + \mathrm{n} \\ \pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \pi^0 + \mathrm{X}^0 \end{array}\right\} \text{（観測されず）} \tag{1.14}$$

は観測されていない．これは，対生成過程(1.9)や(1.10)は観測されているが，“混合”過程(1.11)は観測されていないことを思い出させる．おそらく，新しいクォークの一対が過程(1.13)の中で創られ，その1つは x^0 に，他は X^0 に取り込まれるのであろう．しかし，過程(1.13)と過程(1.9)，(1.10)の間には大きな違いがある．過程(1.13)の断面積は強い相互作用によることを示し，電磁的過程ではない．にもかかわらず，図1.31に示すような機構が働き，π^- の中の $\bar{\mathrm{u}}$ クォークはpの中のuクォークと消滅し，グルーオンによって伝達される強い相互作用によって，新しいクォーク対 ($\mathrm{s}\bar{\mathrm{s}}$) が創られる，と想像することができよう．放出される x^0 は ($\mathrm{d}\bar{\mathrm{s}}$) という構成を持つ中間子，$\mathrm{X}^0$ は (sud) という重粒子である．もちろん，図1.31を文字どおりそのまま受け取るわけにはいかない．例えば，sと $\bar{\mathrm{s}}$ が終わりの状態でどのようにハドロンの中に取り込まれるか，何も説明していない．おそらく，典型的には複数のグルーオンを含む複雑な過程が，いろいろからみあって，こういう束縛を生ずるのであろう．さらにこの図は，いま随伴生成現象の理由と考えられているものを具体化している．すなわちクォークは必然的にある識別指標 — 一括して“フレイバー”と呼ぶ — を持ち，グルーオンの強い力はこの指標を混合しない．したがって $\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{d} + \mathrm{g}$ のような過程は存在しない．“ストレンジネス (S)”がこのような指標であっ

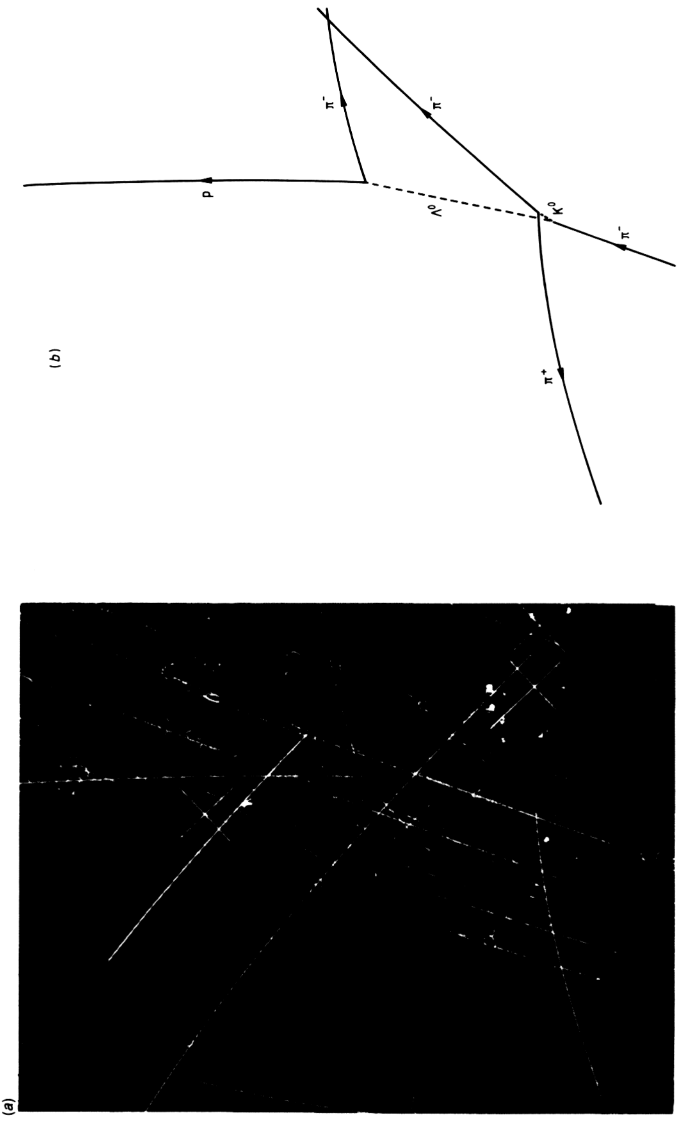


図1.30　ストレンジ粒子の随伴生成

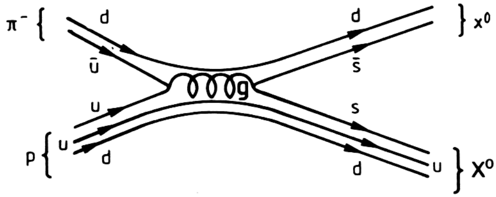


図 1.31 随伴生成の簡単なクオーク機構

て，s クオークは $S=-1$ と決められている．負号はまったく歴史的な理由による．中間子 $(d\bar{s})$ が K^0 であって，Pais (1952) の“随伴生成”仮説ののちに提唱された経験的な Gell-Mann (1953) および西島 (1955) の分類では $S=+1$ ととられているからである．重粒子 X^0 は Λ^0 で，ストレンジネス -1 が与えられている．

いまやストレンジネスをもつ中間子の状態 $(q\bar{s},\ \bar{q}s)$ や重粒子の状態 (qqs) をいろいろ構成することができる．これらがいろいろな K 中間子やハイペロン（超核子，Λ 粒子や Σ 粒子）であって，それらの励起状態を含めて“ストレンジネス”分光学が成立する．ストレンジネス量子数は，強い相互作用では保存される．

なぜ，“ストレンジ（奇妙な）”と言われるのであろうか．その答えは過程 (1.13) からすぐ見てとれる．K^0 と Λ^0 は常に相伴って創られるのにもかかわらず，$S=0$ を持つ普通のよく知られた粒子にやすやすとして崩壊するのである．この謎は，崩壊過程は弱い相互作用に特徴的な寿命を持つこと，および量子数 S は強い相互作用では保存されるが弱い相互作用では保存されず，したがって弱い相互作用は $S=0$ の状態と $S\neq 0$ の状態を混合するという（当時としてはまったく新しい）考えを認めることで解決された．（そうであれば反応 (1.14) は原理的に起こり得るが，断面積が極めて小さいということになる．）クオークの階層で言えばストレンジネスの変わる典型的な遷移は図 1.32 で，フレイバーを混合するような下部過程 $s\to W^-+u$ が含まれている．さらにクオーク対 (ud) を全体の“傍観者”として付け加えれば，図 1.32 は Λ 粒子の（ストレンジネスの変わる）ベータ崩壊 $\Lambda^0\to e^-\bar{\nu}_e p$ の機構を表す．ストレンジネスの変わる弱い相互作用については，第 11 章でより詳しく論ずる．

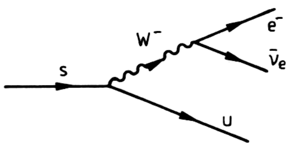


図 1.32　s クォークのストレンジネスを変える弱い崩壊

“チャーム”もまた，強い相互作用では保存されるが弱い相互作用では保存されないもう1つのフレイバー量子数である．中間子状態$(c\bar{c})$，チャーモニウムについてはすでに1.2節で言及した．この中間子は正味のチャーム数は持っていないが，$(q\bar{c})$，$(\bar{q}c)$のたぐいのチャーム数を持つ中間子や，チャーム数を持つ重粒子も同定されている．第11章では弱い相互作用の過程におけるチャーム価についてさらに議論する．

“世代の繰り返し”の話はこれで終わりではない．1975年 Perl ら（1975）は第三の“電子まがい”，質量 1.78 GeV を持つ τ^- 粒子が存在する証拠を発見した．その崩壊の特徴（$\tau\to\mu\nu\bar{\nu}_\mu$，$\tau\to e\nu\bar{\nu}_e$）から，電子の相棒に相当する粒子 ν_τ の存在も示される．二重子（ν_τ，τ）はすべての点で二重子（ν_e，e^-），（ν_μ，μ^-）と同じ相互作用をするように見える．いままで論じた見地からすれば，これに相当するクォークの二重子（t，b）が存在するはずであり，それぞれ“トップ”および“ボトム”クォークと名づける．$(b\bar{b})$ 状態は一般に Υ（ウプシロン）粒子と呼ばれ，1977年に発見された(Herb *et al*., 1977, Innes *et al*., 1977)．$(b\bar{b})$ および $(c\bar{c})$ 状態は今もなお詳しい研究が続いている．$(c\bar{c})$ および $(b\bar{b})$ の分光学については Perkins(1987)に詳しい．本書執筆時においては，電荷 $+2/3$ の t クォークが存在する確実な証拠はまだない．

クォークの質量については，わざとあいまいにしてきた．クォークは自由な遊離した粒子として存在しないようであるから，その質量をどう決定するか自明ではない．しかしながら，$(c\bar{c})$ や $(b\bar{b})$ のような重いハドロン状態に対しては，ハドロンの質量への主な寄与は，加算的に寄与をするクォークの実効質量である，としてさしつかえない．このようにして，質量およそ 3 GeV の $(c\bar{c})$状態から $m_c\sim1.5$GeV，質量およそ 10 GeV の $(b\bar{b})$状態から $m_b\sim5$ GeV が極めて粗い値として得られる．レプトンもそうであるが，クォークも世代が高まるにつ

れて重くなるようである．トップ・クォークの質量は 40 ないし 50 GeV，あるいはそれ以上と評価されている．

基本的と考えられるフェルミオンの総体をまとめると，どうにも非経済的であると言わざるを得ない．そしてさらに高い世代があるのかも知れない．なぜ 3 つの世代があるのかわかっていないから，もうほかの世代がないとは言えないのである．確かに，e^-（質量～0.5 MeV），μ^-（～106 MeV），τ^-（～1.8 GeV）という系列から，何か新しい種類の分光学を考えてみたい誘惑に駆られる．しかしまだ，人々を納得させるような模型を作り上げた人はいない．1 つのことを指摘すれば，これらの状態はみな同じスピンを持ち，明らかに普通の励起スペクトルのようには見えない．さらに付け加えると，これらの状態の間にはガンマ線を放出する遷移が起こらない．普通ならばこれは必ず起こることである．状況は多分，原子物理の初期の時代によく似ているのではなかろうか．観測にかかる遷移間の規則性を整理し体系化して，まず経験法則が定式化された．これらの法則は経験的な量子数を用いて言い表され，のちに至って，量子力学の発達とともに，量子数は角運動量とかパリティーとかで説明されるようになったのである．“電子性”とその他のレプトン量子数，“ストレンジネス”とかその他のクォークのフレイバー量子数，それらはまだ純粋に経験的な段階であって，これらの量の力学的な理解には達していない．おそらくこれは，まったく新しい力学理論が最終的に必要であることを示すのであろう．

さて，この章の終点に達し次の章への道を準備するところに来た．一方電荷とかカラー価（色価）のような属性と他方フレイバー指標のような属性との間に，決定的な区別があると思われることを強調しておかなくてはならない．前者は直接力学的な意義を持つが，後者はそうでない．例えば電荷の場合，この性質を持つ粒子は電磁場の存在のもとで明確な応答を行い，それ自身電磁場を作り出す，ということを意味する．レプトン数やクォークのフレイバーについては，このような力の場は知られていない．これらの指標は現在のところ純粋に経済的な分類の工夫にすぎず，力学的意義が与えられていない．この点を明らかにして，粒子のカタログ紹介を終わり，粒子間に働く力の研究を，まず電磁相互作用から始めよう．

まとめ

(1)　物質と力．
(2)　標準理論：レプトンとクオーク，強い力・電磁力・弱い力．
(3)　物質構造の階層．原子・原子核・核子による散乱と分光学．
(4)　クオークの存在する証拠．
(5)　場の量子論における力．力の量子と物質の量子．
(6)　力と量子の交換．
(7)　世代．フレイバー．
(8)　フレイバー対力学的量子数．

問題

1．1　(a)　自由空間における過程

$$e^- \to e^- + \gamma$$

はエネルギー・運動量の保存により禁止されることを示せ．

(b)　同様に，自由空間における過程

$$\gamma \to e^+ + e^-$$

は禁止されることを示せ．

1．2　第9章でさらに述べるが，観測にかかるハドロンの状態は，可能な量子数によって極めて強く制限を受けるのは顕著な事実である．例えば，電荷2を持つ中間子(π^{++}のごとき)はいまだかつて観測にかかっていない．この状態は既知のクオーク（$q\bar{q}$）の組み合わせでは作ることができない．したがってそれが存在しないことは，簡単なクオーク模型の描像の正しさを確認するものである．

(a)　既知のクオーク（$q\bar{q}$）の組み合わせにより，ほかの作り得ない中間子の状態を指摘せよ．

(b)　既知のクオーク（qqq）の組み合わせによっては作り得ない重粒子の可能な状態を指摘せよ．

(a), (b)で求めたそれぞれの状態について，もしそれが存在するならば，どのようにして創られるか反応を述べよ．このとき，標準的な強い相互作用の保存

則を満たすとせよ（例えば $\pi^+ p \to$ “π^{++}” $+ n$）.

$S=+1$ を持つ重粒子が存在する証拠を調べよ.

第2章 ゲージ理論としての電磁気学

2.1 序論

前章において，物質のもっとも簡単な構成要素はクオークとレプトンであると考える主な理由を，簡単に概観してきた．そこで見てきたように，高エネルギー粒子加速器で現在到達しうる限りの短い距離に至るまで，クオークもレプトンも点状であるように見える．ここで本書の主要課題，これら“素粒子”間の力の本質について話を進めなくてはならない．

今，話題になっている力の1つ，電磁力は長年にわたり，古典的装いのもとによく研究されてきた．一世紀以上前，Faraday，Maxwell，その他の人々は電磁相互作用の理論を発展させ，1864年のMaxwellの論文（Maxwell，1864）でその頂点に達した．今日でもMaxwellの理論は生き残っている．Newtonの“古典力学”は，Einsteinによって相対論的速度（光の速度に近い速度）では変更が必要であると示されているのと，対照的である．さらに，Maxwellの電磁気学は，量子力学と適宜結びつくと，“量子電磁力学”QEDとなり，本書の第2部で“われらの持つ最良の理論”と呼ぶ体系を与える．第6章で見るように，この理論は実験とまったくすばらしい一致を示す．すでに述べたように，弱い力と強い力の理論はQEDのある種の一般化であり，QEDと同じ成功が約束されている．QEDはしたがって模範的な理論である．

今日の視点からすれば，電磁気学の決定的美点は，<u>力学</u>（力のふるまい）が<u>対称性</u>の原理と密接に関係している理論であることである．日常の世界で対称操作とは，物体に施しても施す前と物体がまったく同じに見えるようにできる操作である．これを拡張して，理論に現れる対象に施したあとでも，施す前とまったく物理法則が同じように見える数学的操作（変換）を考える．このような変換は，ふつう法則の<u>不変性</u>と呼ばれる．例えばなじみ深い例として，すべ

ての基本法則は平行移動(並進)および回転に対して不変である．Newtonの運動法則は，相互作用する粒子の系を，平行移動したり回転しても，やはり正しい．もちろんこの2つの不変性は，どんな特定の力の法則とも特別の関係を持たない．どんな自然法則にでも，古典法則でも量子法則にでも適用できるからである．そのかわり，許容される自然法則の形をかなりの程度まで制約してしまうが，決して唯一に定めることはできない．にもかかわらず，この線に沿った議論は，さらに別種の対称化による制約を課すと，力の法則の形が本質的に決まってしまうようなことが実際可能か，という推論につながる．この問題に対する1つの答は次のようであろう — なぜ力の法則はそうなっているのか．(もちろん終局的には，1つの質問を他の質問で置き換えたことにすぎない．)

この章では，以上の見地から電磁気学を取り扱う．これは理論の歴史的展開ではないが，ほかの2つの相互作用に拡張できる道である．これがこの方法の中心的な考え方を，早い時期に電磁気学との関連で紹介しておくことが重要であると信ずる理由である．

これらの相互作用を理解するうえで決定的に必要なことは，大局的(大域的)不変性と局所的不変性の区別である．大局的不変性では，すべての時空点にわたって同じ変換が施される．変換は“どこでも同時に”という性格を持つ．局所的不変性では，異なった時空点それぞれに異なった変換が施される．いずれ証明することであるが，一般に，大局的に不変である理論は局所的に変わるような変換に対して不変でない．しかし，理論の中のもともとの粒子と特定の形で相互作用をする新しい力の場を導入し，この場が局所的変換に対して特定の形で変換するようにすれば，一種の局所的不変性が回復されるのである．以下詳しく議論を進めるにつれて，これらの事実はいっそう明瞭になってくると思うが，把握しなくてはならない重要な概念は次のようである．これらの特別な力の場とその相互作用は，ある特定の局所的不変性を成立させるために存在する，とみなされる．電磁気学に関する特定の局所的不変性は，Maxwellの方程式に対するゲージ不変性として知られている．理論の量子力学的形式の場合，この性質は，量子場のある局所的位相変換に対する不変性と直接に結びついている．この位相不変性の一般化は，弱い相互作用と強い相互作用の理論の基礎になる．だからこれらの理論はすべて“ゲージ理論”として知られている．

2. 2　Maxwell 方程式と電流の保存

古典電磁気学の基礎法則，Maxwell の方程式の考案からはじめよう．粒子物理学に便利な単位系（Heaviside-Lorentz 単位系）を用いる（付録C参照）．Maxwell の仕事以前では，自由空間における電磁気学の法則は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_{\mathrm{em}} \qquad \text{(Gauss の法則)} \tag{2.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t \qquad \text{(Faraday-Lenz の法則)} \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \text{(磁荷の不存在)} \tag{2.3}$$

と書かれ，定常電流について

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}} \qquad \text{(Ampère の法則)} \tag{2.4}$$

が成立していた．Maxwell はこの最後の式の発散をとると電荷の連続方程式

$$\partial\rho_{\mathrm{em}}/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}}=0 \tag{2.5}$$

と矛盾することを指摘した．

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0 \tag{2.6}$$

であるから，式(2.4)から

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}}=0 \tag{2.7}$$

が導かれる．この式は電荷密度が時間によらない時にのみ正しい．一般の場合には，Maxwell は Ampère の法則を修正して

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}}+\partial\boldsymbol{E}/\partial t \tag{2.8}$$

とした．これは式(2.5) と矛盾しない．式(2.1)，(2.2)，(2.3) と式(2.8) が，自由空間における Maxwell の方程式である．

決定的に重要な連続方程式(2.5) は，任意の空間 Ω の中の電荷の減少率は，その表面より外にある電流（束）のみに正確に等しいこと，すなわち Ω の中では正味の電荷は作られもしなければ消滅もしない，ということを表す．Ω はいくらでも望むとおりに小さくとれるから，これは電荷が局所的に保存しなければならないことを意味する．全体としては電荷が保存する，あるいは“大局的”に保存するにもかかわらず，電荷が空間の一点で作られ，別の一点で消滅することは起こり得ない．その根本的な理由は，電荷の保存の大局的な形は，（今，そこに陽電子を作った，というたぐいの）信号が瞬間的に伝わることを必要とするからであり，これが特殊相対論（これは歴史的に電気力学の土壌に咲いた

花である）と矛盾するからである．Maxwell によって導入された余分な項“変位電流”は，局所的に電流が保存する力学的方程式に基づいている．

この点で，不変性について前に述べたように，もう 1 つの局所的/大局的の区別を導入したことに注意してほしい．この場合，区別は保存則に適用される．古典力学でも量子力学でも，不変性は保存則に結びついているのだから，さほど驚くべきことではない．しかし，不変性とともに保存法則（電磁気学の電荷保存則のような）は，ゲージ諸理論においては力学と密接に関連するという意味で，中心的な役割を果たすのである．この点は，新しく創られた素粒子 X の電荷をどのように測れるかを問うことにより，簡単に示すことができる．2 つ概念的に異なった方法がある．

（i） X が

$$A+B \rightarrow C+D+X$$

のような反応で作られるように工夫する．ここで A，B，C，D の電荷はあらかじめ知られているとする．この場合，X の電荷を決めるため電荷の保存則を用いることができる．

（ii） X が既知の電磁場の中でどうふるまうか観測する，これは X の電荷をきめるのに力学を用いている．

どちらの方法も同じ答を与える．粒子の場への応答を決定するものは，保存される電荷である．これに対して，粒子物理では，レプトン数の保存やバリオン数の保存のように，力学的な対応（1. 4 節の終わりの注意を参照）を持たないと思われる幾多のほかの保存則が存在する．新しく創られた粒子のバリオン数を決定するには，量子数 B の保存則を用いて，反応の両辺のバリオン数をすべて足し合わせなければならない．われわれの知る限り，バリオン数に結びつく力の場はない．

このように，ゲージ理論は 3 つの概念要素，対称性・保存則・力学の密接な絡み合いのうえに成り立っているという特徴を持つ．実際今日では，正確な量子数保存則は関連したゲージ理論の力の場を持つものに限る，と広く信じられている（2. 6 節の注記（ii）参照）．したがってバリオン数は絶対的には保存されない，と考えることができ，強い相互作用・弱い相互作用・電磁相互作用を統一しようという意図を含むゲージ諸理論では，実際そうなっている．以上の議

論で，これら3つの要素の2つの対の間の関係，対称性⟷力学，保存則⟷力学，の間の関係について簡単に触れてきた．残った連動，電磁的ゲージ不変の対称性と電荷の保存則の間を結ぶこと，を正確に行う方法はより技術的である．この関係は，場の量子論からの簡単な着想を用いて，第4章で行う．いまのところ，Maxwell 方程式の勉強を続け，特にそれが表すゲージ不変性を調べよう．

2.3　Maxwell 方程式とゲージ不変性

古典電磁気学や特に量子力学では，場 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の代わりにベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_\mu(x)$ を導入するのが便利である．

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V-\partial\boldsymbol{A}/\partial t \tag{2.10}$$

上の式は3-ベクトル（3次元ベクトル）$\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル V とを定義する．この定義により，方程式(2.2）と（2.3）は自動的に満足される．

古典電磁気学のゲージ不変性の出発点は，与えられた物理的な場 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ に対して，ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と V が唯一には決まらないという事実にある．$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$(したがって Maxwell 方程式)を変えないで $\boldsymbol{A}$, V を変える変換を，ゲージ変換と呼び，これに関連した Maxwell 方程式の不変性をゲージ不変性という．

ではこれはどんな変換であろうか．明らかに，任意の関数 χ を用いて $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi \tag{2.11}$$

のように変更しても，curl grad≡0 であるから $\boldsymbol{B}$ には何の変化もない．$\boldsymbol{E}$ を元のようにしておくためには，V が同時に

$$V\rightarrow V'=V-\partial\chi/\partial t \tag{2.12}$$

のように変わらなくてはならない．これらの変換は，4-ベクトル（4次元ベクトル）ポテンシャル†

$$A^\mu\equiv(V,\ \boldsymbol{A}) \tag{2.13}$$

を導入し，微分演算子 $(\partial/\partial t,\ -\nabla)$ が4-ベクトル ∂^μ の成分をなす（問題2.1参

---

†(原注)　相対論的記法については付録 A·2 を参照せよ．

照）ということに注意すれば，1つの簡潔な方程式で書ける．すなわち，ゲージ変換は

$$\boxed{A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi} \tag{2.14}$$

で表される．Maxwell の方程式も 4-電流 $\boldsymbol{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(x)$

$$j^{\mu}_{\mathrm{em}} = (\rho_{\mathrm{em}},\ \boldsymbol{j}_{\mathrm{em}}) \tag{2.15}$$

を用いて相対論的不変性をあらわにした形に書くことができる．4-電流により連続の方程式は

$$\partial_{\mu} j^{\mu}_{\mathrm{em}} = 0 \tag{2.16}$$

となる（問題 2.1 参照）．Maxwell の方程式(2.1) と (2.8) は

$$\partial_{\mu} \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = j^{\nu}_{\mathrm{em}} \tag{2.17}$$

となる（問題 2.2 参照）が，場の強さのテンソル $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ は

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \tag{2.18}$$

で定義する．明らかに $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ はゲージ変換

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi \tag{2.14}$$

のもとで不変だから，この形の Maxwell 方程式はあらわにゲージ不変である．A^{μ} の満たす“相対論的に共変な場の方程式”は，式(2.17)，(2.18) から導かれ，

$$\Box A^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\mu} A^{\mu}) = j^{\nu}_{\mathrm{em}} \tag{2.19}$$

となる．ゲージ変換は電磁気学の量子論で基本的に重要であるから，なぜ Maxwell 方程式がゲージ不変であるか，ある洞察を示すのは役に立つと思われる．もっとも重要な“第四の”方程式(2.8) は，連続の方程式

$$\partial_{\mu} j^{\mu}_{\mathrm{em}} = 0 \tag{2.16}$$

で表現される局所的電荷保存の要求から，Maxwell によって推論された．場の方程式

$$\partial_{\mu} \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = j^{\nu}_{\mathrm{em}} \tag{2.17}$$

はもちろん式(2.16) の内容を含んでいる．そうである数学的理由は，$\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ が 4 次元の“回転”

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \tag{2.18}$$

だからである．この式は明らかにゲージ変換

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi \tag{2.14}$$

によって不変である．したがって，ゲージ不変性はなんらかの形で電荷の保存と関係があるだろう，という示唆が得られる．しかしその関係は簡単ではない．Wigner (1947) は，どんな物理量も静電ポテンシャルの絶対値には依存しないという原理と，エネルギー保存の原理を併用して，電荷の保存を導く簡単な議論を与えた．Wigner の議論は，電荷（およびエネルギー）の保存と，静電ポテンシャルを定数だけ変じた変換による不変性を結びつけたものである．電荷の保存だけでは，時空座標に依存するより一般的なゲージ変換を要請できるようには思えない．

静電ポテンシャルを定数だけ変えることは，以前大局的変換と呼んだものの一例（ポテンシャルの変化はどこでも同じだから）である．この大局的変換のもとでの不変性は，保存則すなわち電荷の保存と結びついている．しかしこの大局的不変性は，Maxwell の力学をすっかり引き出すのには不十分である．しかし，'t Hooft (1980) によって注意されたように，方程式(2.11) と (2.12) を静電ポテンシャル V の局所的変化（式(2.12) の中の $\partial\chi/\partial t$ 項）を — Maxwell の方程式を不変に保つという意味で — 補償するように磁気的ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が局所的に変わる，とみなすことができる．このように磁気的効果を含むことによって，V の定数だけの変化が局所的変化（これはより強い制約を与える）に拡張される．したがって，電気と磁気を統合する完全な Maxwell 方程式をほとんど“導く”ことができるかもしれない，という示唆の芽がここにある．理論がポテンシャルで表され，これらのポテンシャルの局所的（ゲージ）変換によって不変であるべしという要求から導こうというのである．もちろん，特殊相対論も一役かわなくてはならない．電荷に対して相対的に運動している観測者から見た電荷の磁気作用を通じて，電気と磁気の関係がついてくる．4-ベクトルポテンシャル A^μ を仮定し，理論が式(2.14) の形の局所的な変化によらないように A^μ を含むと要求すると，物理的な場は $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$（これも式(2.14) のもとで不変である）を通じてのみ入ってくる，という着想に導かれる．これから，場の方程式を Lorentz 共変性をもとにして推定することができるであろう．

これは明らかに Maxwell 方程式の“証明”でもなければ“導出”でもないことは言うまでもない．しかしながら，力学（この場合，電気的効果と磁気的効

果の完全な相互連携）が局所的不変性の要求（この場合，電磁的ゲージ不変性）と密接に関連しているという着想が，実りあることが判明した．2.1節に示したように，一般にある大局的不変性が局所的不変性に拡張されると，新しい"補償"場が現われて特定の形で相互作用をする，というのが普通である．局所的不変性の要求から"導いた"力学的理論の最初の例は，Yang と Mills の理論（1954，Show，1955 参照）であると思われる．本書第3部の冒頭に，この論文からの引用を載せてある．彼らの仕事は内山（1956）に引き継がれ，このような補償場の一般的定式化が行われた．すでに述べたように，局所的不変性の原理に基づくこのような力学諸理論を，ゲージ諸理論と呼んでいる．

現在基本的とみなされている相互作用は，すべてこの型であるのは，顕著な事実である．Maxwell の方程式をこの見地から簡潔に論じたが，次の節では（量子）電気力学につなげよう．本書では追求しないもう1つの例は，一般相対論（重力相互作用の理論）である．内山（1956）は，重力の理論も特殊相対論の大局的（時空座標によらない）座標変換を局所的に拡張することで得られることを示した．電磁気学と同じように，局所的不変性の要求はより制約的で，新しい場（重力場）が存在してその相互作用の形が（ほとんど）決まってしまう．ほかの2つの基本的な相互作用 — クォーク間の強い相互作用と，クォーク・レプトン間の弱い相互作用 — もまたゲージ諸理論（本質的に Yang-Mills の型）で記述できるようであり，本書の第3部と第5部で詳しく議論する．

引き続き議論を展開するためには，ここでこのような考え方をどのように量子力学の中に取り入れるか，調べなくてはならない．

2.4 量子力学におけるゲージ不変性

電場・磁場の影響を受けて速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q を持つ非相対論的粒子に働く Lorentz の力の法則は

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{2.20}$$

である．この力は，Hamilton の方程式によって，古典的なハミルトニアン†

$$H=(1/2m)(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2+qV \tag{2.21}$$

†（原注） つねに $\hbar=c=1$ とおく（付録B参照）．

から導かれる．電磁場の中にある粒子に対する Schrödinger 方程式は

$$\left(\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A})^2+qV\right)\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\mathrm{i}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} \tag{2.22}$$

で，古典的なハミルトニアンから Schrödinger の波動力学のいつもの処方 $\boldsymbol{p}\rightarrow -\mathrm{i}\nabla$　($\hbar=1$) で導いたものである．自由な（電磁場のない）粒子の Schrödinger 方程式から電磁場の中を運動する粒子に移行する場合は，演算子 ∇，$\partial/\partial t$ の代わりに演算子の組み合わせ

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{D}&\equiv\nabla-\mathrm{i}q\boldsymbol{A}\\ D^0&\equiv\partial/\partial t+\mathrm{i}qV\end{aligned}} \tag{2.23}$$

が現れることに注意せよ．

Schrödinger 方程式 (2.22) の解 $\psi(\boldsymbol{x},\ t)$ は，ポテンシャル V，$\boldsymbol{A}$ の影響のもとに運動する粒子の状態を完全に記述する．しかしすでに見たように，これらのポテンシャルはただ1つには決まらない．ゲージ変換

$$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi \tag{2.11}$$

$$V\rightarrow V'=V-\partial\chi/\partial t \tag{2.12}$$

でポテンシャルを変えても，場 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ に対する Maxwell の方程式は変わらない．それから直ちに深刻な疑問が生ずる．方程式 (2.22) の中でこのような変更を行うと，その後の方程式

$$\left(\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A}')^2+qV'\right)\psi'(\boldsymbol{x},\ t)=\mathrm{i}\frac{\partial\psi'(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} \tag{2.22a}$$

の解 $\psi'(\boldsymbol{x},\ t)$ は，方程式 (2.22) の解 $\psi(\boldsymbol{x},\ t)$ と同じ物理を記述するであろうか．もしそうであれば，Maxwell の理論が量子の世界でも成り立つと考えることができるであろうし，そうでなければ，Maxwell 方程式の持つゲージ対称性が量子論では成り立たないことになるから，なんらかの修正が必要であろう．

$\boldsymbol{A}$，V と $\boldsymbol{A}'$，V' の間の関係式 (2.11)，(2.12) がわかっているから，方程式 (2.22a) が方程式 (2.22) と両立するためには，$\psi'(\boldsymbol{x},\ t)$ がどんな形であればよいか，実際に調べることができる．ここではまず答を与え，それを証明し，その物理的解釈を論じよう．答は

$$\psi'(\boldsymbol{x},\ t)=\exp[\mathrm{i}q\chi(\boldsymbol{x},\ t)]\psi(\boldsymbol{x},\ t) \tag{2.24}$$

である．ここで χ は変換 (2.11)，(2.12) に現れる時空間の関数である．これを証明するためにまず次の量を計算する．

$$\begin{aligned}(-\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A}')\psi'&=[\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A}-q(\nabla\chi)][\exp(\mathrm{i}q\chi)\psi]\\&=q(\nabla\chi)\exp(\mathrm{i}q\chi)\psi+\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(-\mathrm{i}\nabla\psi)\\&\quad+\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(-q\boldsymbol{A}\psi)-q(\nabla\chi)\exp(\mathrm{i}q\chi)\psi\end{aligned}\qquad(2.25)$$

この最初の項と最後の項とが打ち消して次の結果を得る．

$$(-\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A}')\psi'=\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(-\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A})\psi\qquad(2.26)$$

これは方程式(2.23) を用いて

$$(-\mathrm{i}\boldsymbol{D}'\psi')=\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(-\mathrm{i}\boldsymbol{D}\psi)\qquad(2.27\,\mathrm{a})$$

と書ける．このように，時空間に依存する位相因子は微分演算子 ∇ の作用を受けるけれども，複合演算子 $\boldsymbol{D}'$ を“やりすごして” $\boldsymbol{D}$ に変えてしまうのである．実際，方程式(2.24) と (2.27 a) とを比較すれば，ψ' が ψ に対して持つ関係とまったく同じ関係を $\boldsymbol{D}'\psi'$ が $\boldsymbol{D}\psi$ に対して持つ．同様にして（式(2.23) 参照）

$$(\mathrm{i}\boldsymbol{D}'^{0}\psi')=\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(\mathrm{i}\boldsymbol{D}^{0}\psi)\qquad(2.27\,\mathrm{b})$$

が出る．ここで V' に対する関係式(2.12)を用いた．再び，$\boldsymbol{D}'^{0}\psi'$ と $\boldsymbol{D}^{0}\psi$ の関係は簡単である．関係式(2.27 a) を導いた計算を繰り返して

$$\begin{aligned}(1/2m)(-\mathrm{i}\boldsymbol{D}')^2\psi'&=\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(1/2m)(-\mathrm{i}\boldsymbol{D})^2\psi\\&=\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot\mathrm{i}D^0\psi\quad\text{（方程式(2.22) を用いる）}\\&=\mathrm{i}D'^0\psi'\quad\text{（方程式(2.27 b) を用いる）}\end{aligned}\qquad(2.28)$$

を得る．方程式(2.28) は D 記号(2.23) を用いて書いた方程式(2.22 a) である．このようにして，式(2.24) は，方程式(2.22) と (2.22 a) の間の両立性を保証する ψ' と ψ の間の関係であることが証明された．

ψ と ψ' は同じ物理を記述するであろうか．答はしかりであるが決して自明ではない．確率振幅密度 $|\psi|^2$ と $|\psi'|^2$ は明らかに等しい．事実，方程式 (2.24) によって ψ と ψ' は位相変換で結ばれているからである．しかし，われわれは微分演算子 ∇ や $\partial/\partial t$ を含むほかの可測量（オブザーヴァブル），例えば $\psi^*(\nabla\psi)-(\nabla\psi)^*\psi$ で表される電流にも関心がある．この電流の式は，変換(2.24) のもとで不変ではないことは容易に検算することができる．位相 $\chi(\boldsymbol{x},\ t)$ が $\boldsymbol{x}$ によるからである．しかし方程式(2.27 a)，(2.27 b) は，ゲージ不変な電流を作るのにどうすればよいか教えてくれる．すなわち ∇ を $\boldsymbol{D}$ で（そして一般には $\partial/\partial t$

を D^0)で置き換えればよい．そうすれば例えば

$$\psi^{*\prime}(D'\psi')=\psi^*\exp(-\mathrm{i}q\chi)\cdot\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(D\psi)=\psi^*D\psi \tag{2.29}$$

となるからである．したがって ψ と ψ' の記述する物理は同じであることが保証される．

以上の重要な考察を次のような主張にまとめておく．ポテンシャルおよび波動関数に，変換の組み合わせ

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}&\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi \\ V&\to V'=V-\partial\chi/\partial t \\ \psi&\to\psi'=\exp(\mathrm{i}q\chi)\psi \end{aligned}} \tag{2.30}$$

を行えば，Maxwell 方程式のゲージ不変性は，量子力学でも成り立つ．

Schrödinger 方程式は非相対論的であるが，Maxwell の方程式はもちろん完全に相対論的である．したがってここで発見した処方は実は相対論でも成り立つのではないか，と想像することができるが，実はその通りである．第3章でスピン0とスピン1/2の波動方程式を導入するが，いまのところ式(2.23)は見かけ上も相対論的共変な形

$$\boxed{D^\mu\equiv\partial^\mu+\mathrm{i}qA^\mu} \tag{2.31}$$

に書けることを指摘しておく．これによって式(2.27 a)，(2.27 b) は

$$-\mathrm{i}D'^\mu\psi'=\exp(\mathrm{i}q\chi)\cdot(-\mathrm{i}D^\mu\psi) \tag{2.32}$$

となる．演算子 ∂^μ を含むどんな波動方程式も，∂^μ を D^μ で置き変えたとき，組み合わせ変換

$$A^\mu\to A'^\mu=A^\mu-\partial^\mu\chi$$
$$\psi\to\psi'=\exp(\mathrm{i}q\chi)\psi$$

によってゲージ不変にすることができる．実際，電磁場が存在するときの粒子の波動方程式を，対応する自由な粒子の波動方程式から得る非常に簡単な処方がみつかったようである．すなわち置き換え

$$\boxed{\partial^\mu\to D^\mu\equiv\partial^\mu+\mathbf{i}\boldsymbol{q}A^\mu} \tag{2.33}$$

を行えばよい．次の節で，これがいわゆる“ゲージ原理”の基礎になっている

ことを示す．前節に展開した考えに従い，相互作用の形が，局所ゲージ不変性に固執することによって決まってしまうのである．

最後に1つ注意をしておく．この新しい微分

$$D^{\mu} \equiv \partial^{\mu} + \mathrm{i}\boldsymbol{q}A^{\mu} \tag{2.31}$$

は基本的に重要であることがわかっている．これはQEDの(アーベル的)位相対称性から，弱い相互作用や強い相互作用の（非アーベル的）位相対称性へ拡張できる．これを“共変微分”と呼ぶ．

2. 5　論旨の逆転・ゲージ原理

前節では，電磁場の中の荷電粒子に対するSchrödinger方程式は

$$[(1/2m)(-\mathrm{i}\nabla - q\boldsymbol{A})^2 + qV]\psi = \mathrm{i}\partial\psi/\partial t \tag{2.22}$$

の形を持つことを既知とした．そのうえで変換の組み合わせ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi \\ V &\to V' = V - \partial\chi/\partial t \\ \psi &\to \psi' = \exp(\mathrm{i}q\chi)\psi \end{aligned} \tag{2.30}$$

に対してゲージ不変性を検証した．さてここで論旨を逆転してみたい．理論は時空座標に依存する位相変換†

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t) \to \psi'(\boldsymbol{x},\ t) = \exp[\mathrm{i}q\chi(\boldsymbol{x},\ t)]\psi(\boldsymbol{x},\ t) \tag{2.34}$$

のもとで不変である，という要求から出発する．このような位相不変性は自由粒子に対しては成立させることができず，必ず(4-ベクトル $\boldsymbol{A}, V$ の)ある場との相互作用を含む理論であって，そのとき場と粒子の相互作用は正確に決定され，かつ $\psi \to \psi'$ に移行するときに場は

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi \tag{2.11}$$

$$V \to V' = V - \partial\chi/\partial t \tag{2.12}$$

の変換を受ける，ということを証明しよう．このタイプの位相変換に対する不変性の要求は，相互作用の形を強制してしまう．これがゲージ原理の基礎である．

であるから，波動関数の位相に注目する．量子力学では波動関数の絶対的位

---

†(訳注)　ここの位相変換（phase transformation）は，理論数学の位相変換（topological transformation）とは別物である．

相は観測できない．ただ相対的位相のみが，ある種の干渉実験によって，測定可能である．たとえば簡単な実例は，2つのスリット（間隙）による粒子の回折実験である．スリットからビーム下流で，波動関数は，それぞれのスリットから生じた2つの成分の可干渉的（コヒーレント）な重ね合わせである．記号的に書けば

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{2.35}$$

である．確率分布 $|\psi|^2$ は，それぞれの強さ $|\psi_1|^2$，$|\psi_2|^2$ のほかに干渉項 $2\mathrm{Re}(\psi_1^* \psi_2) = 2|\psi_1||\psi_2|\cos\delta$ を含む．ただし $\delta = \delta_1 - \delta_2$ は成分 ψ_1, ψ_2 の間の位相差である．強度の極大と極小が交互に表れるというよく知られた干渉縞は，位相差の変化に帰着される．もし2つの成分の位相が合えば干渉は強めあい $|\psi|^2$ は極大値をとる．もし2つの成分の位相が完全にはずれれば干渉は弱めあい，$|\psi|^2$ は極小値をとる．それぞれの位相 δ_1, δ_2 を同じ値だけ変えても，観測された結果には違いはでない．位相の差 δ だけが関与するからである．

なんら観測にかかる効果なしに波動関数がある流儀で変わるという事情は，まさに量子力学における対称性あるいは不変性の原理から生ずる状況である．いま論じているのは，位相が全体として一定の変化をするときの不変性である．計算を行うときは位相を選ぶ必要があるが，これが“位相の規約”である．実際にどのような値をとるかということは重要ではない．不変性の原理によって，物理は変わらないことが保証されているからである．しかしなんらかの選択をしなくてはならない．

位相を定数だけ変えることは，前節の術語によれば，大局的不変性の一例である．変換を

$$\boxed{\begin{aligned} \psi \to \psi' &= e^{i\alpha}\psi \\ \alpha &= \text{定数} \end{aligned}} \qquad \text{大局的位相変換} \tag{2.36}$$

と書くことにより，この点を明らかにしておこう．式(2.36)の中の α は定数であって，すべての時空間の点で同じ値をとる．ある位相の規約（すなわち α の選択）が時空間のある一点でなされたならば，同じ規約がすべての点でなされねばならない．したがって2つのスリットの実験では，位相の局所的な変化を勝手に行うことはできない．たとえば 't Hooft (1980) によって論じられたよう

に，１つのスリットのすぐ後に半波長板を挿入すれば，観測にかかる結果が生ずるからである．

これはきわめて不自然であるように思われる，という説にも一理ある．いったんある位相の規約を時空間の一点で行ってしまえば，同じ規約をすべての点でとらなくてはならない．位相を変える半波長板は瞬間的に全空間に広がるか，あるいはもともと存在してはならないものである．この考え方をたどっていくと，局所的な位相変換の不変性を要求する“可能性を探る”べきではないか，という境地に達する．すなわち，時空間の各点でそれぞれ独立に位相を選ぶことができる素地があるのではあるまいか．それ自身としては，この議論は局所的不変性を要求すべきのっぴきならぬ動機というほどのものではない．しかし，2. 3 節で指摘したように，大局的不変性から局所的不変性へ移行することは，古典電磁気学や一般相対論では決定的な意味を持ち，いまや素粒子の相互作用を理解するうえでの鍵になっているように思われる．そこで，“局所的位相不変性”

$$\boxed{\psi(\boldsymbol{x},\ t)\to\psi'(\boldsymbol{x},\ t)=\exp[\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{x},\ t)]\psi(\boldsymbol{x},\ t)}\qquad \text{局所的位相変換} \qquad (2.37)$$

の要求がいったい何を導き出すか，調べてみよう．

ただちに１つの問題が生ずる．これは自由な Schrödinger 方程式，あるいはいかなる自由な相対論的方程式に対する不変性ではない．たとえば，もともとの波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},\ t)$ が自由粒子の Schrödinger 方程式

$$(1/2m)(-\mathrm{i}\nabla)^2\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\mathrm{i}\partial\psi(\boldsymbol{x},\ t)/\partial t \qquad (2.38)$$

を満たすとしよう．上の局所的位相変換で与えられる波動関数 $\psi'(\boldsymbol{x},t)$ は，自由粒子の Schrödinger 方程式を満たさない．これは ∇ も $\partial/\partial t$ も位相因子の中の $\alpha(\boldsymbol{x},t)$ に働くからである．したがって局所的位相変換の不変性は，自由粒子の波動方程式の不変性ではない．局所的位相不変性の要求を満たそうとすれば，自由粒子の Schrödinger 方程式を修正して，不変性が成り立つようにしてやらなくてはならない．しかし，修正された方程式はもはや自由粒子を記述しない．換言すれば，荷電粒子の波動関数の位相を局所的に変える自由は，なんらかの種類の力の場を導入し，粒子がその場の中で運動する，としなければあり得ない．より物理的な言い方をすれば，位相の規約を局所的に変更する効果と，粒

子が新しい場の中を運動する効果と，両者を観測によって区別することはできない.

これはどんな種類の場であろうか．実は答はすでに知っているのである．局所的位相変換

$$\psi \to \psi' = \exp[\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{x},\ t)]\psi \tag{2.37}$$

で $\alpha = q\chi$ とおけば，これはまさに電磁的ゲージ不変性に関連した位相変換にほかならないからである．このようにして Schrödinger 方程式を

$$(1/2m)(-\mathrm{i}\nabla)^2\psi = \mathrm{i}\partial\psi/\partial t \tag{2.38}$$

から

$$(1/2m)(-\mathrm{i}\nabla - q\boldsymbol{A})^2\psi = (\mathrm{i}\partial/\partial t - qV)\psi$$

に修正し，$\psi \to \psi'$ に移るときの局所的位相不変性

$$\psi \to \psi' = \exp[\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{x},\ t)]\psi$$

を満たすために，$\boldsymbol{A}$，V が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + q^{-1}\nabla\alpha \\ V &\to V' = V - q^{-1}\partial\alpha/\partial t \end{aligned} \tag{2.39}$$

のように変換することを要求しなくてはならないのである．修正した方程式はもちろん，$\boldsymbol{A}$ と V で記述される電磁場と荷電粒子との相互作用を記述する Schrödinger 方程式そのものである.

共変的な取り扱いでは，$-\nabla$ と $\partial/\partial t$ がちょうど **4** 元ベクトル ∂^μ の各成分であるように，$\boldsymbol{A}$，V を 4 元ベクトル A^μ の成分とみなすことができる．したがって，電荷 q の任意の粒子と“普遍的”なきまった流儀で相互作用するベクトル場 A^μ が，局所的位相不変性の要請から存在しなくてはならない．A^μ のように，局所的位相不変性を保証するために導入されるベクトル場を“ゲージ場”という．位相（あるいはゲージ）不変性によって相互作用がそのように決められてしまう，という原理をゲージ原理という．この原理によって，相互作用をしている粒子の波動方程式を，自由な粒子の波動方程式から書き下すことができるのである†．前と同じように，明らかにこの方法は **4** 次元の場合にも拡張できる.

---

†(原注)　実は，この手続きによって一意に電磁相互作用が決まるのは，スピン 0 の粒子とスピン 1/2 の粒子だけである．スピン 1 の粒子については 8.4 節参照.

2. 6　電磁気学におけるゲージ原理に関する注釈

（i）しかるべく懐疑的な読者は，上の議論に重要な手品が隠されていることをかぎつけたかもしれない．電(磁)荷はまさしくどこから現れたのか．今まで説明した議論の難点は，場 $\boldsymbol{A}$, V をすべての粒子とまったく同じに結合するように定義することもできた，という点にある．実はそうせずに，因子 q をひそかに持ち込んだ．

実は，もう少しうまく議論を運ぶことができる．電荷は正確に保存するという事実を用いて，異なる電荷 q を持つ状態は量子力学的な干渉を起こさない，と要請するのである．したがって，あるきまった q の“領域”には，たとえば

$$\psi'=\exp(\mathrm{i}q\chi)\psi \tag{2.40}$$

のような異なる位相変化が許されるのである．これが局所的変換 $\chi\to\chi(\boldsymbol{x}, t)$ となれば，項 $q\nabla\chi$ を消去する必要が生じ，これが“$-q\boldsymbol{A}$”項の存在を意味する．このような議論は，“絶対的に”保存する量子数 q に対してのみ成立することに注意してほしい．そうでないと，q の異なる値で区別される非可換的な領域に系の状態を分割することはできない．この考え方を逆転させれば，バリオン数の保存のように，関連するゲージ場のない保存則は，絶対的な保存則ではないと現在は考えられている．

なぜ q が電荷であって，それ以外の絶対的に保存される量子数ではないのか，まだ制約してなかった．A^{μ} を電磁ポテンシャル，q を粒子の電荷と同定するしかるべき理由は，第4章で場の量子論を援用して行う．

（ii）このような同定ができたとして，相互作用の形はただ1つのパラメーター，粒子の電荷 q だけを含むということに注意する．電荷が q の粒子であれば，レプトン・ハドロン・原子核・イオン・原子など，粒子の型によらず相互作用は同じである．第11章で見るように，正確にこの種の“普遍性”がクオークやレプトンの弱い相互作用にもある．このことは，弱い相互作用を誘起するのにもある種のゲージ原理が働いているに違いない，と強く暗示する．しかし第13章で論ずるように，関連した対称性や保存則は極めて微妙な種類のものである．ついでの事であるが，ある電荷 q を持つ粒子は電磁的には普遍的に相互作用を行うが，上の議論では，自然界で観測される粒子の電荷は，すべて1素

量の整数倍であるという理由はなに1つ与えられていない．この荷電量子化の問題については15．2節で立ち帰ってくる．

(iii)論点(i)に戻ってそこでは電荷の絶対的保存則を独立の公理として導入しなければならなかったが，そうしないでも説明できるであろうか．すでに(2．2節の終わりに）注意したように，保存則を対称性，この場合は変換（2.37）のもとにおける不変性，と結びつけたいのである．この対称性の本質は，もう少し詳しく調べる値打ちがある．これはたとえば併進や回転の不変性とは異なり，時空座標 $\boldsymbol{x}$ と t の変化を含む対称性ではない．そのかわり波動関数の実部・虚部に働く変換である．いま ψ を

$$\psi=\psi_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\psi_{\mathrm{I}} \tag{2.41}$$

の形に書けば，ψ'

$$\psi'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi=\psi_{\mathrm{R}}'+\mathrm{i}\psi_{\mathrm{I}}' \tag{2.42}$$

は

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{R}}'&=(\cos\alpha)\psi_{\mathrm{R}}-(\sin\alpha)\psi_{\mathrm{I}}\\ \psi_{\mathrm{I}}'&=(\sin\alpha)\psi_{\mathrm{R}}+(\cos\alpha)\psi_{\mathrm{I}}\end{aligned} \tag{2.43}$$

の形に書け，これから変換は一種の“回転”であるが，これは波動関数の実部と虚部を“座標”とする $\psi_{\mathrm{R}}-\psi_{\mathrm{I}}$ 平面内での回転である．この平面を内部空間と呼び，それにつながる対称性を内部対称性という．位相不変性は，内部空間の一種の回転不変性であると見ることができる．

このような変換を二度続けて行うと考えると

$$\psi\to\psi'\to\psi'' \tag{2.44}$$

となり，このとき

$$\psi''=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\psi' \tag{2.45}$$

$$\psi''=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\psi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\psi \tag{2.46}$$

が成り立ち，$\delta=\alpha+\beta$ である．これははじめの形と同じ形である．このような変換の集合は数学でいう“群”を作る．この場合は U(1) 群で，すべてのユニタリー1次元行列の群である．ユニタリー行列 $\mathbf{U}$ は性質

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger}=\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}=\mathbf{I} \tag{2.47}$$

を持つ行列で，$\mathbf{I}$ は恒等行列，$\dagger$ はエルミート共役を示す．1次元行列とはもちろんたんなる数のことで，この場合は複素数である．条件(2.47)はこれを簡単

な位相に制限してしまう．すなわち，$e^{i\alpha}$ の形の位相因子（α は任意の定数）の集合は，U(1) 群の要素を成す．これらがまさに，波動関数のゲージ（あるいは位相）変換の中に入ってくる因子である．したがって，電磁的ゲージ群は U(1) である，という．

U(1) 群の変換は，それが施される順序によらないという簡単な性質がある．式(2.44)から(2.46)を参照すると，β "回転" をまず行ってその後 α 回転を行っても，その逆を行っても，同じ最終的結果を得たはずである．もちろんこれは

$$\exp(i\alpha)\cdot\exp(i\beta)=\exp[i(\alpha+\beta)]=\exp(i\beta)\cdot\exp(i\alpha)$$

だからである．数学では U(1) をアーベル群（可換群）と呼ぶ．のち第 9 章および第 14 章において，強い相互作用や弱い相互作用のゲージ不変性に用いられる "内部" 対称性の空間は，これほど簡単ではないことを示す．これらの場合は，式(2.43)のような 2 次元（平面上の）回転ではなく，実空間の完全な 3 次元回転に似たものである．一般に，このような実空間の回転は交換しないことが知られているから，強い回転や弱い回転もそうであろう．そのゲージ群は非アーベル的（非可換的）であるという．

式(2.42)で表される対称性は，実は電荷の保存則と関係していることは第 4 章で学ぶ．

(iv) 注意深い読者は，さらに 1 つ垂れ下がったしっぽをつかんだかもしれない．ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は磁場 $\boldsymbol{B}$ と

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.9}$$

のように結びついている．もし $\boldsymbol{A}$ が特別な形

$$\boldsymbol{A}=\nabla f \tag{2.48}$$

をとれば $\boldsymbol{B}$ は消えてしまう．したがって，ゲージ原理によって導入した $\boldsymbol{A}$-場が，自明な理論 ($\boldsymbol{B}=0$) を与える式(2.48)の形ではない，ということがどうしてわかるかという疑問に答えなくてはならない．この疑問に答えるのは極めて値打ちのある寄り道である．

ベクトルポテンシャルとして ∇f を持つ Schrödinger 方程式は

$$(1/2m)(-i\nabla-q\nabla f)^2\psi=E\psi \tag{2.49}$$

である．この方程式の形式的な解は

$$\psi = \exp\left(\mathrm{i}q\int_{-\infty}^{x}\nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\cdot\psi\ (f=0) \tag{2.50}$$

と書くことができる．これは

$$\frac{\partial}{\partial a}\int^{a} f(t)\mathrm{d}t = f(a) \tag{2.51}$$

を用いて検算することができる．記号 $\psi\ (f=0)$ は $f=0$ とおいた自由粒子の解を意味し，線積分は点 $\boldsymbol{x}$ に終わる任意の径路に沿って行う．しかし

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \equiv \nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.52}$$

であるから，線積分は直ちにできて解は

$$\psi = \exp[\mathrm{i}q(f(\boldsymbol{x}) - f(-\infty))]\cdot\psi(f=0) \tag{2.53}$$

となる．このときベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}=\nabla f$ (実際は場の存在しない場合にあたる) から導かれる位相因子は積分可能であるという．この特別な $\boldsymbol{A}$ の効果は，自由粒子の解に $\boldsymbol{x}$ に依存する（自明な定数の位相を別にして）位相を乗ずるだけである．この $\boldsymbol{A}$ は現実の電磁効果は何も生じないのだから，波動関数のこのような変化もまったく無害である，と考えて差し支えないはずである．実際，Dirac (1981, p.92～93) はこのような位相因子は運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ の定義のしなおしにほかならないことを示した．本質的な点は，（例えば 1 次元では）$\hat{p}$ は結局は交換子 ($\hbar=1$)

$$[\hat{x},\ \hat{p}] = \mathrm{i} \tag{2.54}$$

で定義されるということである．確かに，なじみ深い置き換えも

$$\hat{p} = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.55}$$

はこの交換関係を満たす．しかし，x の任意の関数を $\hat{p}$ に付け加えることができ，$\hat{x}$ は x の任意の関数と可換だから，この修正された $\hat{p}$ もまた交換関係を満たす．Dirac はさらに詳しく考察を行い，この任意関数は F を任意の関数として $\partial F/\partial x$ の形を持たなくてはならないことを示した．したがって

$$\hat{p}' = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \tag{2.56}$$

は採用できる運動量演算子である．さて波動関数 $\psi(f=0)$ と運動量演算子 $\hat{p}=-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ で定義される量子力学を考えよう．ユニタリー変換

$$\psi\,(f=0) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(x)}\psi\,(f=0) \tag{2.57}$$

によって $\hat{p}$ は

$$\hat{p} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(x)}\,\hat{p}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)} \tag{2.58}$$

に変換される．しかしこの式の右辺はまさに $\hat{p}-q\,\partial f/\partial x$ であって（問題 2．3 参照），これは qf を Dirac の F と同定すれば，同等に許容できる運動量演算子である．

$\boldsymbol{A}$ が ∇f の形ではない物理的な興味ある場合は何だろうか．Schrödinger 方程式は

$$(1/2m)(-\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A})^2\psi=E\psi \tag{2.59}$$

であり，その解は

$$\psi=\exp\left(\mathrm{i}q\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\cdot\psi\,(\boldsymbol{A}=0) \tag{2.60}$$

である．線積分はもはや自明に行うことはできない．$\boldsymbol{A}$- 場は積分不能な位相因子を生ずるという．その術語には，積分の遂行が難しいというたんなる問題以上の意味が含まれている．決定的な点は，積分は $\boldsymbol{x}$ に到達するまでにたどる道筋によることである．一方，積分可能な場合式(2.50)では，積分は始めと終わりの点だけによって，それを結ぶ経路によらない．

さて $-\infty$ から $\boldsymbol{x}$ に至る 2 つの経路 C_1, C_2 を考えよう（図 2.1 参照）．2 つの線積分の差は閉じた曲線 C 上の積分で，Stokes の定理により

$$\int_{C_1}^{x}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_{C_2}^{x}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.61}$$

となる．S は曲線 C を張る任意の表面である．もし $\boldsymbol{A}=\nabla f$ であれば，curl grad

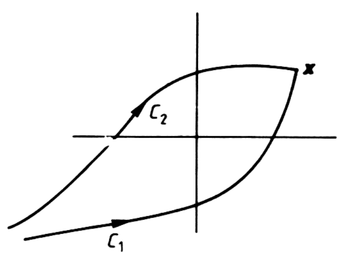


図 2.1　$-\infty$ から点 x に至る 2 つの経路 C_1，C_2（簡単にするため 2 次元の図形で描いた）

$\equiv 0$ であるから C_1, と C_2 に沿う線積分は等しい．しかしもし $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ がゼロでなければ，積分の差は取り込まれた磁束（$\boldsymbol{B}$ のフラックス）によって与えられることがわかる．

以上の解析は，その発見者にちなんで命名された顕著な現象，Aharonov-Bohm 効果（Aharonov and Bohm, 1959）の存在を意味することがわかる．2.5 節の複細隙の実験に戻り，今度は細隙の間に長い薄いソレノイド（線輪）を入れたと考える（図 2.2）．したがって分割されたビームの成分 ψ_1 と ψ_2 は，ソレノ

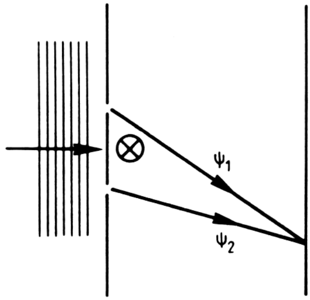


図 2.2　Aharonov-Bohm 効果

イドのそれぞれ片側を通過する．ソレノイドをまわってビームは再び合体し，その干渉縞がビームの下流で観測される．干渉模様のどの点 $\boldsymbol{x}$ においても，ψ_1 および ψ_2 成分の位相は $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ の場合に比べて式(2.60) の形で修正されるであろう．これらの因子はそれぞれの径路に依り，径路は 2 つの成分 ψ_1 と ψ_2 で異なる．したがって，干渉模様を決定する位相の差は，式(2.61)の $\boldsymbol{B}$ に依存する因子を含むであろう．すなわち，場 $\boldsymbol{B}$ は本質的にまったくソレノイドの中に閉じ込められ，ビーム自体は $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ の領域だけを通ってきたのにもかかわらず，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ であれば干渉模様に観測にかかる効果があるはずである．$\boldsymbol{B}$ が変化したときに干渉縞が移動するこの効果は，Aharonov と Bohm の予言のすぐあと，はじめて Chambers (1960) によって実験的に確認された．この現象はすでに Ehrenberg and Sydney (1949) によって予測されていた．さらに詳しい文献と議論は Berry (1984) を見よ．

（v）結論として，大局的位相不変性から局所的位相不変性に重大な飛躍をすることを是認する強力な論理はどこにもないことを，強調しておかなくてはならない．大局的不変性は，それ自身では，場の量子論で局所的電荷保存を保証するのに必要かつ十分である．にもかかわらず，局所的位相不変性の要請から相互作用を導くというゲージ原理は，簡単で美しく強力であり，そして成功しているように見える．したがってこの原理は素粒子物理学を席巻してしまった．本書のあとのほうで，電磁的ゲージ原理の一般化を考えよう．非電磁的な相互作用の理論をある種のゲージ原理に基づいてたてようとする時には，いつも正確な対称性がなければ意味をなさないということを胆に銘じておかなくてはならない．その理由は，理論の“繰り越み可能性”を考えてはじめて明らかになるであろう（第6章参照）．

まとめ

(1) Maxwell の方程式と電荷の局所的保存．
(2) 電磁ポテンシャル A^μ とゲージ変換．
(3) 場の強さのテンソル $F^{\mu\nu}$．
(4) A^μ を用いた Maxwell 方程式の Lorentz 共変・ゲージ不変な形．
(5) 量子力学のゲージ不変性は，A^μ がゲージ変換で変わるのに応じて，波動関数の位相因子（時空座標に依存する）が変わることを要求する．
(6) 相互作用を創出するゲージ原理(電磁場の場合)，大局的および局所的不変性．
(7) U(1) 変換．
(8) 積分不能な位相因子と Aharonov-Bohm 効果．

問題

2. 1　(a)　x^1 方向の Lorentz 変換は次のように与えられる．

$$t'=\gamma(t-vx^1),\quad x'^1=\gamma(-vt+x^1)$$
$$x'^2=x^2,\quad x'^3=x^3$$

ここに $\gamma=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}$，$c=1$ である．この変換の逆変換を書き下し，(すなわち $(t,\ x^1)$ を $(t',\ x'^1)$ で表す)，偏微分の“連鎖規則”を用いて，Lorentz 変換のもとで2つの量 $(\partial/\partial t,\ -\partial/\partial x^1)$ は $(t,\ x^1)$ と同じように変換することを示せ．

(注)一般の結果を述べると，4成分を持つ量 $(\partial/\partial t,\ -\partial/\partial x^1,\ -\partial/\partial x^2,\ -\partial/\partial x^3)\equiv(\partial/\partial t,\ -\nabla)$ が $(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ と同じように変換する．このように変換する4成分の量を“反変4-ベクトル”といい，4-ベクトルの指標を上に書く．すなわち $(\partial/\partial t,\ -\nabla)\equiv\partial^\mu$．上の指標は測度テンソル $g_{\mu\nu}$ によって下へ下げることができ(付録 A. 2 参照)，空間成分の符号が変わる．したがって $\partial^\mu=(\partial/\partial t,\ \partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2,\ \partial/\partial x_3)$ である．同様に4つの量 $(\partial/\partial t,\ \nabla)=(\partial/\partial t,\ \partial/\partial x^1,\ \partial/\partial x^2,\ \partial/\partial x^3)$ は $(t,\ -x^1,\ -x^2,\ -x^3)$ と同じように変換し，“共変4-ベクトル”であって ∂_μ と書く．

(b)　方程式(2.5)が方程式(2.16)のように書けることを示せ．

2. 2　場の強さ $F^{\mu\nu}$ は何個の独立な成分を持つか．それぞれの成分を電場および磁場の成分で表せ．このようにして方程式(2.17)は方程式(2.1)と(2.8)を正しく再現することを示せ．

2. 3　次の結果を証明せよ．

$$e^{iqf(x)}\hat{p}e^{-iqf(x)}=\hat{p}-q\frac{\partial f}{\partial x}$$

第3章 Klein-Gordon方程式・Dirac方程式とその負エネルギー解の解釈

われらが始まりと呼ぶものはしばしば終わりであり終えるということは始めるということである．到達点とは出発点にほかならない．

T. S. Eliot, “4つの四重奏”のうち“リトル・ギディング” より

3.1 はじめに

関与する諸粒子の静止質量エネルギーをはるかに超えるようなエネルギー領域で遂行される実験の結果を解析するには，非相対論的な Schrödinger 方程式ではとうてい間に合わないことは明らかである．したがってこの章の第一の目的は，今後取り扱う諸資料への避くべからざる準備として，これから主に用いることになる2つのもっとも簡単な相対論的波動方程式，Klein-Gordon 方程式（スピン0）と Dirac 方程式（スピン 1/2）を導入することである．より完全な取り扱いはほかの文献（Bjorken and Drell, 1964, Aitchison, 1972）に詳しく論じられているから，ここでは簡単に述べることにする．

しかしながら，ある重要な題目についてはやや詳しく説明しよう．それは，量子力学の“1粒子波動関数”の範囲における反粒子の取り扱いである．1.3節で判明したように，粒子の生成 — ふつうは粒子・反粒子対の生成の形で起こる — は高エネルギー物理の特徴である．波動方程式を用いる伝統的な手法は，たとえ方程式が相対論的であっても，不適当であるように思われる．それは，ひとつひとつの“粒子”の自由度に対してひとつひとつ波動関数を導入し，これら粒子の数は変わらないと考えているからである．自然な定式化は，粒子の生成や消滅の可能性をはじめから取り入れた形のものであろう．これは場の量子論を扱う次の章で行う．

しかし伝統的な“波動方程式”流のやり方でも，粒子の生成・消滅を取り扱

う方法が存在することがわかっている．これが波動方程式の負エネルギー解は反粒子を記述するという Feynman の解釈で，3．4節で説明する．場の量子論へ直行する代わりに，この方法を推進しようとする少なくとも2つの理由がある．第一の理由は，基礎になる物理的な見かたはつねに重要であり，多少抽象的な場の量子論の定式化に有用な物理的洞察を付け加えるからである．第二の理由は，ラグランジアンに基づいた場の量子論の完全な手法を実際に用いることはほとんどないであろうからである．実際，量子振幅を相互作用の強さの冪級数（ベキ級数）で表したとき，その最低次の近似を超えて何かを考える，ということは極めてまれである．このような制限された目的に対しては，普通の量子力学の摂動論により，振幅を相互作用ポテンシャルと自由粒子の波動関数を用いて表せるのである．もちろんポテンシャルや波動関数をしかるべく相対論的にとれば，（3．6節では電磁気学に対してどう実行するか調べる），この方法だけに基づいてかなりの所までいけるのである．

量子場の理論ではなく量子力学だけに基づいて相当の議論ができるという事実は，たいへん喜ばしい状況である．完璧な場の量子論の複雑さはまったく恐るべきものだからである．疑いもなく，粒子理論の専門家になろうとする人達は場の理論に熟達しなくてはならない．しかし本書はそのような専門家の卵に向けて書かれているのではない．むしろ，ゲージ諸理論の重要な概念と簡単な応用について，広い読者層に対して，比較的手っとり早く門戸を開くことを目的にしている．本書の計算の大部分は，場の量子論ではなく量子力学的な手法によっている．しかしいくつか基本概念の視点については，場の量子論を援用しよう（例えば，位相変換と荷量の保存則との関係など）．これから自由に用いることになる“Feynman 図形（ダイヤグラム）”の物理的解釈についても，またその発想の動機を詳しく説明できるはずである．さもないと図形は訳のわからぬものになりかねない．

3．2　Klein-Gordon 方程式

非相対論的 Schrödinger 方程式は，非相対論的なエネルギーと運動量の関係式

$$E = \boldsymbol{p}^2/2m \tag{3.1}$$

に，演算子の置き換え†

$$E \to \mathrm{i}\partial/\partial t \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\nabla \tag{3.3}$$

を行ったものにあたる，とみなすことができる．これらの微分演算子は，Schrödinger の波動関数に作用すると考える．

相対論的波動方程式に対しては，まず正しい相対論的なエネルギーと運動量の関係式からはじめなくてはならない．エネルギーと運動量は，4 元運動量ベクトル

$$p^{\mu} = (E, \ \boldsymbol{p}) \tag{3.4}$$

の“時間”および“空間”成分であり，質量殻条件

$$p^2 = p_{\mu}p^{\mu} = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 \tag{3.5}$$

を満たす．エネルギーと運動量は，4 元ベクトルの異なる成分にすぎないから，関係式

$$E = +(\boldsymbol{p}^2 + m^2)^{1/2} \tag{3.6}$$

に基づいて相対論的理論をたてようとする試みは歓迎できない．そのうえ，演算子の平方根をどう解釈するか，という明らかな難点が伴う．このような難点を含まない非相対論的 Schrödinger 方程式を確立するより以前に，Schrödinger その人と，のちに Klein と Gordon は，エネルギーの 2 乗の関係式

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \tag{3.7}$$

から相対論的量子力学を作ろうと試みた．E および $\boldsymbol{p}$ を演算子で置き換えると次の方程式が得られる．

$$-\partial^2\phi/\partial t^2 = (-\nabla^2 + m^2)\phi \tag{3.8}$$

これが Klein-Gordon 方程式（KG 方程式と略す）である．1 成分のスカラー波動関数 $\phi(\boldsymbol{x}, \ t)$ の場合を考えるが，これは内部自由度を持たないスピン 0 のボソン（Bose 粒子）を記述するのに適していると期待される．

3. 2. 1 座標空間での解

D'Alembert 演算子

---

†（原注） 本書の全体を通じて $\hbar = c = 1$ とおく（付録 B 参照）．

$$\Box\equiv\partial_\mu\partial^\mu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2 \tag{3.9}$$

により，KG 方程式は

$$(\Box+m^2)\phi(\boldsymbol{x},\ t)=0 \tag{3.10}$$

となる，次の形

$$\phi(\boldsymbol{x},\ t)=Ne^{-iEt+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}=Ne^{-ip\cdot x} \tag{3.11}$$

の平面波解を探すことにしよう．ここで指数ベキを暗示的な 4 元ベクトルのスカラー積

$$p\cdot x=p_\mu x^\mu=Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \tag{3.12}$$

の形に書いた．N はのちに決定する規格化の因子である．この波動関数が KG 方程式の解であるためには，直接に解を方程式に代入して，E と $\boldsymbol{p}$ が

$$E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2 \tag{3.13}$$

の条件によって結びついていなくてはならない．この関係は別段問題はないように見えるが，実は 3 元運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して，エネルギー E には 2 つの解

$$E=\pm(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2} \tag{3.14}$$

がありうることを意味する．Schrödinger およびその他の人々がただちに看破したように，矛盾をおこすことなしには負エネルギーの解を無視することはできない．それでは負エネルギーの解をどのように扱ったらよいであろうか．

3．2．2　確率の流れ

非相対論的な Schrödinger 方程式とまったく同様に，KG 方程式に対しても“確率の流れ（カレント）”の保存則を導くことができる．方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi+m^2\phi=0 \tag{3.15}$$

に ϕ^* を乗じ，方程式(3.15) の複素共役方程式に ϕ を乗じた式を引き去れば，多少の変形（問題 3．1 を見よ）ののち

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{3.16}$$

をうる．ただし，ρ，$\boldsymbol{j}$ は

$$\rho=i\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)\phi\right] \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{j}=\mathrm{i}^{-1}[\phi^*\nabla\phi-(\nabla\phi^*)\phi] \tag{3.18}$$

で与えられる．微分 $(\partial_\mu\phi^*)$ はかっこの中だけに働く．あからさまな 4 元ベクトル記法では，この保存則は

$$\partial^\mu j_\mu=0 \tag{3.19}$$

の形に書ける（式(A.62) 参照)．ただし確率の流れ j^μ は

$$j^\mu\equiv(\rho,\ \boldsymbol{j})=\mathrm{i}[\phi^*\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi^*)\phi] \tag{3.20}$$

で定義される．空間部分 $\boldsymbol{j}$ は Schrödinger の確率の流れと一致するが，KG 方程式の場合は時間部分 ρ すなわち“確率密度”は時間微分を含む．これは KG 方程式が時間微分について 2 階だからである．これは ρ がつねに正とは限らないことを意味する．それでは ρ は確率密度を表しうるのであろうか？　実際，平面波の解

$$\phi=Ne^{-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.21}$$

から

$$\rho=2|N|^2E \tag{3.22}$$

が導けるが(問題 3.1 参照) E は正の値も負の値もとることができる． ρ の符号は E の符号と同じであって，ここに問題のありかを明白にみてとることができる．

歴史的に言えば，負エネルギーの問題と結びついた負確率の問題につまずいて，KG 方程式は放棄されてしまったのであった．しばらくの間，歴史に従う．すぐ再びこの問題に立ち戻って，KG 方程式を救済することを考える．

3. 3　Dirac 方程式

KG 方程式の場合，問題がなぜ生じてきたかは明らかである．

(a)　2 乗の形のエネルギー・運動量関係式

$$E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2$$

と密接な対応をとって波動方程式をたてたので，負エネルギーの解が直ちに表れる．

(b)　KG 方程式は $\partial^2/\partial t^2$ の項を含む．これから $\partial/\partial t$ を含む“確率密度”の連続方程式が導かれ，したがって負の確率が登場する．

Dirac はこの問題を，彼一流の直さいな方法で攻めた．正で有限な確率密度 $\rho\geqq 0$ を得るために，方程式は $\partial/\partial t$ について線型であると要請した．そうすると，

相対論的共変性（後出）から，方程式は ∇ についても線型でなくてはならない．仮定した方程式は

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} &= \left[-\mathrm{i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)+\beta m\right]\psi(\boldsymbol{x},\ t) \\ &= (-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi(\boldsymbol{x},\ t) \end{aligned} \tag{3.23}$$

である（Dirac, 1928）．ここで α とか β とは何であろうか．α, β に対する条件を見いだすために，相対論的波動方程式に求められている条件を考えてみよう．

(a)　E と $\boldsymbol{p}$ の間の正しい相対論的関係式

$$E=+(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2}$$

を与える．

(b)　方程式は Lorentz 変換に対して共変的である．

第 2 の要求は，しばらくあとまわしにしよう．付録Aでは共変性の概念を，非相対論的なスピンの自由度に対する Pauli 方程式

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\chi=E\chi \tag{3.24}$$

を例として説明してある．ここで χ は 2 成分スピノール，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ と E はともに回転に対してスカラーである．Dirac の方程式に対しては，式を 4 元ベクトル，スカラーなどで書き表し，証明なしにこれらの変換性を仮定することにする．証明は Bjorken-Drell（1964）または Aitchison（1972）にある．

要請 (a) を入れるために，Dirac は波動関数 ψ がさらに KG 方程式と同じ条件

$$-\partial^2\psi/\partial t^2=(-\nabla^2+m^2)\psi \tag{3.25}$$

を満たすことを求めた．再び負エネルギー解の登場を許すことが，あとから明らかになる．Dirac のすばらしい業績は，このみかけの困難を，理論物理学の勝利に転換してしまったことである．

さて，$\boldsymbol{\alpha}$ と β に対する条件を導こう．方程式

$$\mathrm{i}\partial\psi/\partial t=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi \tag{3.26}$$

の両辺を 2 乗すれば

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi &= (-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi \\ &= -\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\frac{\partial^2\psi}{(\partial x^i)^2}-\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{3}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^j} \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$-\mathrm{i}m\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+\beta^2m^2\psi$$

となる．しかし，ψ もまた KG 条件を満たすという要請から

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{(\partial x^i)^2}+m^2\psi \tag{3.28}$$

が成り立たなくてはならない．したがって，$\boldsymbol{\alpha}$ と β は普通の古典的な可換量ではあり得ない．方程式(3.27)の右辺の望ましくない項を消去するためには，$\boldsymbol{\alpha}$，β は次の反交換関係を満たさなくてはならない．

$$\alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{3.29 a}$$

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0,\qquad i,\ j=1,\ 2,\ 3;\quad i\neq j \tag{3.29 b}$$

さらに条件

$$\alpha_i^2=\beta^2=1 \tag{3.29 c}$$

を付け加える．同じく反交換関係を満たす非相対論的なスピン 1/2 粒子に対する Pauli 行列の形を思い起こせば，$\boldsymbol{\alpha}$ および β も，列ベクトル（スピノール）ψ に作用する行列である，と解釈するのが自然である．したがって，Dirac 方程式は 1/2 の奇数倍のスピンを持つ粒子を表すと考えられる．Dirac の条件を満たしうる行列でもっとも小さい次元を持つものは，4 行 4 列であることを証明するのはむずかしくない (Bjorken-Drell，1964，Aitchison，1972)．$\boldsymbol{\alpha}$ および β の習慣的なとり方は

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma_i\\ \sigma_i & \mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \beta=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix} \tag{3.30}$$

である．ここで 4 行 4 列の行列を 2 行 2 列の行列を対角的においたブロック記法で表した．σ_i は通常の 2 行 2 列の Pauli 行列であり，$\mathbf{1}$ は 2 行 2 列の単位行列である．このような簡略記法に慣れていない読者は，この記法の表す 4 行 4 列のあからさまな形

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \tag{3.31}$$

その他を用い，2 行 2 列のブロック記法がまさに要求された条件を満たすことを直接示してほしい．これらの条件は

$$\{\alpha_i,\ \beta\}=0 \tag{3.32 a}$$

$$\{\alpha_i,\ \alpha_j\}=2\delta_{ij}\mathbf{1} \tag{3.32 b}$$

$$\beta^2=\mathbf{1} \tag{3.32 c}$$

である．ここに $\{\mathbf{A},\ \mathbf{B}\}$ は2つの行列の反交換子 $\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$ であり，$\mathbf{1}$ は4行4列の単位行列である．$\boldsymbol{\alpha}$，β のこのとり方はけっして一意でないことに注意せよ．実際，任意の4行4列のユニタリー行列 $\mathbf{U}$ から作られる

$$\alpha_i'=\mathbf{U}\alpha_i\mathbf{U}^{-1} \tag{3.33 a}$$

$$\beta'=\mathbf{U}\beta\mathbf{U}^{-1} \tag{3.33 b}$$

は，反交換関係を不変に保つから，すべて求める行列である．たいていの場合，われわれは上の標準的な表示を用いるが，ある場合には，β が対角的でないほかの表示のほうが便利なこともある（しかし必ずしも必要ではない）．

3.3.1　自由粒子の解

いまや Dirac のハミルトニアンは4行4列の行列を含むから，Dirac の波動関数 ψ も4成分を持つ列ベクトル，いわゆる Dirac スピノールと解釈しなくてはならない．自由粒子の解を探そう．非相対論的な場合は，2成分スピノール χ を用いて，一般的なスピン 1/2 のスピノールを

$$\psi=\chi\cdot(\text{平面波}) \tag{3.34}$$

の形に書いた．この類推から，Dirac 方程式の解を

$$\psi=\omega e^{-ip\cdot x} \tag{3.35}$$

の形で求める．ここに ω は4成分スピノール，$p^\mu=(E,\ \boldsymbol{p})$ を用いて $e^{-ip\cdot x}$ は平面波の解である．この式を Dirac 方程式

$$i\partial\psi/\partial t=(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi \tag{3.26}$$

に代入し，$\boldsymbol{\alpha}$，β の形をあからさまに用いる．2行2列のブロック形式を用いるために，次のようにスピノール ω を2成分スピノール ϕ と χ に分割するのが習慣でもあり，便利でもある．

$$\omega=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{3.36}$$

さて行列方程式

$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\mathbf{1} & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{3.37}$$

は 2 つの連立方程式

$$(E-m)\phi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi \tag{3.38}$$

$$(E+m)\chi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi \tag{3.39}$$

に分かれる（問題 3．3 参照）．式(3.39) を χ について解けば，一般的な 4 成分スピノールは次の形に書ける．

$$\omega=\begin{pmatrix}\phi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi\end{pmatrix} \tag{3.40}$$

これが Dirac 方程式の解であるためには，E と $\boldsymbol{p}$ の間にどんな関係が成り立つべきであろうか．式(3.39) から χ を求めて式(3.38) に代入し，関係式 (問題 3.2 参照)

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=\boldsymbol{p}^2\mathbf{1} \tag{3.41}$$

を用いると，任意の ϕ に対して次の方程式が得られる．

$$(E-m)(E+m)\phi=\boldsymbol{p}^2\phi \tag{3.42}$$

したがって $\boldsymbol{p}$ のある値に対して KG 方程式と同じ結果，すなわち E の 2 つの値

$$E=\pm(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2} \tag{3.14}$$

が得られる．正エネルギーの解および負エネルギーの解が再び許されるのである．

Dirac 方程式は負エネルギー解の問題を解決してはいない．それでは，確率の流れはどうなるのであろうか．

3．3．2　Dirac 方程式の確率の流れ

結果を暗示することになるが，ρ と名づける次の量を考察しよう．

$$\rho=\psi^{\dagger}(x)\psi(x) \tag{3.43}$$

ここで $\psi^{\dagger}$ は列ベクトル ψ のエルミート共役である行ベクトルである．成分で

書けば

$$\rho=(\psi_1^*,\ \psi_2^*,\ \psi_3^*,\ \psi_4^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \tag{3.44}$$

であるから，次の式が成り立つ．

$$\rho=\sum_{a=1}^{4}|\psi_a|^2>0 \tag{3.45}$$

ρ はあからさまに正値確定のスカラー密度である．これは確率密度に要求される性質の 1 つである．さらに Dirac 方程式からくる保存則と，それに対応する確率の流れの存在を要請してみよう．実際（問題 3．4 参照），Dirac 方程式

$$\mathrm{i}\partial\psi/\partial t=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi \tag{3.26}$$

とそのエルミート共役方程式

$$-\mathrm{i}\partial\psi^\dagger/\partial t=\psi^\dagger(+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\overleftarrow{\nabla}+\beta m) \tag{3.46}$$

から，必要な形の保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{3.47}$$

を証明することができる．記法 $\psi^\dagger\overleftarrow{\nabla}$ には説明が必要である．これは 3 個の 1 行 4 列の行列

$$\psi^\dagger\overleftarrow{\nabla}_x\equiv\partial\psi^\dagger/\partial x \text{ など}$$

の簡略記法である．（$\psi^\dagger$ は 1 行 4 列の行列である．）

上の方程式の確率の流れは

$$\boldsymbol{j}(x)=\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\alpha}\psi(x) \tag{3.48}$$

であり，成分が

$$(\psi^\dagger\alpha_1\psi,\ \psi^\dagger\alpha_2\psi,\ \psi^\dagger\alpha_3\psi) \tag{3.49}$$

から成る 3 元ベクトルを表す．したがって

$$j^\mu=(\rho,\ \boldsymbol{j}) \tag{3.50}$$

を 4 元的な確率の流れと解釈することが許され，明らかに KG 方程式の流れとは異なる．これは予期してしかるべきであった．

3．4　負エネルギー解の Dirac の解釈と Feynman の解釈

今までの話を次のようにまとめることができよう.

Klein-Gordon 方程式 { 負の確率 / 負のエネルギー

Dirac 方程式 { 正の確率 / 負のエネルギー

歴史は Dirac の方程式と，負エネルギー解に対する Dirac の卓抜な解釈を経て進展した. 自由な Dirac 電子に対して，可能な正および負のエネルギー準位は，$E=0$ に対して対称である. 図 3.1 にその事情を表してある.

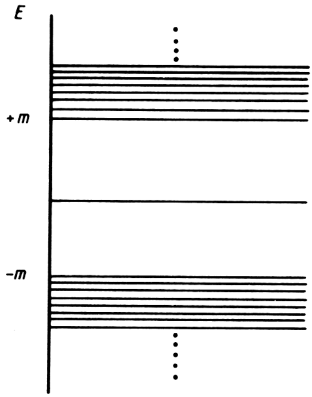


図 3.1 Dirac 粒子のエネルギー準位

正エネルギーの電子がより低いエネルギーの負エネルギー状態に遷移することを避けるため，Dirac は正常な空虚な状態（正エネルギー電子の存在しない "真空状態"）は，すべての負エネルギー状態が電子で満たされている状態であると仮定した. このとき Pauli の排他原理(禁制律)は，任意の正エネルギー電子はより低い負エネルギー状態に落ちることを禁止する. いまや "真空" は無限大の負の電荷とエネルギーを持つが，すべての観測はこの真空に対して，エネルギーや電荷の有限なゆらぎを表すことになるので，首尾一貫した理論が導けるのである. たとえば，負エネルギーの電子が 1 個，この Dirac の海から欠けていれば，正常な真空に対して "空孔" が 1 つ存在することになる.

"空孔" のエネルギー$=-(E_{\text{neg}})\longrightarrow$正のエネルギー

"空孔"の電荷$=-(q_e)\longrightarrow$正の電荷

したがって，負エネルギー電子の欠如は，正エネルギーの正に帯電した電子（陽電子）の存在と等価である．"反粒子"のこの予言は理論物理の最大の成果の1つである†．Anderson は陽電子の実験的発見によって，1932年のノーベル賞を授けられた．

このようにして，Dirac 方程式とその負エネルギーの解から，意味のある物理的結果を得ることができることが証明された．しかしながら，理論はもはや真の"1粒子"理論ではないことは明らかである．正常な"空虚の状態"を構成する負エネルギー電子の無限の海を，励起することができるからである．たとえば，負エネルギー電子を正エネルギーに励起すれば，終わりの状態には，正エネルギーの電子と正エネルギーの陽電子"空孔"とを得る．物理的にこれは，e^+e^- の対生成に対応する．

したがってフェルミオンの負エネルギー問題をこのように扱うことは，場の量子論を直接必要とする．第4章でこの点についてさらに言及しなくてはならない．

しかしそれでは，KG 方程式の負エネルギー解についてはどうであろうか．スピン 1/2 の粒子に対してはすばらしい成功を収めたにもかかわらず，Dirac の解釈はスピン0の粒子には適用できないことは，まったく明らかである．ボソンは排他原理に従わないからである．

実際，次の章で略述するように，どちらの場合でも成り立つ矛盾のない物理像が場の量子論から出てくる．しかしこの章のはじめに述べたように，本書のあとの部分で考える実用的な計算の大部分では，場の量子論の精巧なしかけをかいくぐって，普通の量子力学の波動関数の概念だけを用いたいと思う．そのため，ここで Feynman による負エネルギー解の純粋に"波動関数"的な取り扱いの処方を説明しよう．これは Dirac の負エネルギーの"海"の概念を用いない．それは明らかにスピン0の粒子には適用できないからである．

Feynman の処方は次のように述べられる（Feynman, 1962)．

---

†(原注)　当時，これは一般的に認識されたことではなかった．たとえば，Pauli は1933年に次のように書いている．"Dirac は空孔を反電子と同定しようと試みた…この説明をまじめに受け取り得るとは，とても考えられない"．

時間に<u>逆行</u>して伝播する負エネルギー<u>粒子</u>の解 ＝時間に<u>順行</u>して伝播する正エネルギー<u>反粒子</u>の解

さてこの処方がもっともらしいことを説明してみよう．ある粒子，たとえば π^+ がポテンシャルによって摂動論の２次で散乱される過程を考えてみよう．非相対論的量子力学（以下 NRQM と略す）では，粒子の軌跡の“時空間”図を図 3.2 のように描くことができる．Feynman によれば，相対論的量子力学（以下 RQM と略す）では，粒子が“時間に逆行して”散乱される（その意味はしだいに明らかになる）可能性を認めなくてはならない．したがって RQM では，図 3.2 の軌跡のほかに，図 3.3 の軌跡をも許さなくてはならない．Feynman の処方

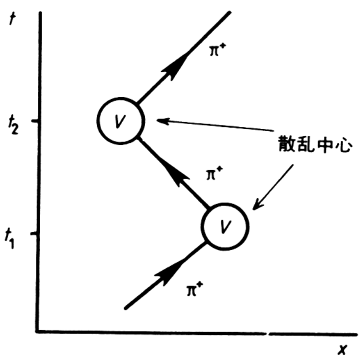


図 3.2　NRQM における２次の散乱の（時空）軌道

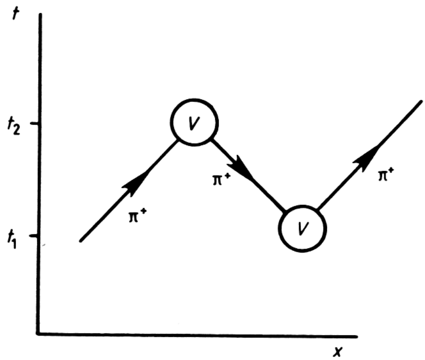


図 3.3　RQM における２次の散乱のもう１つの（時空）軌道

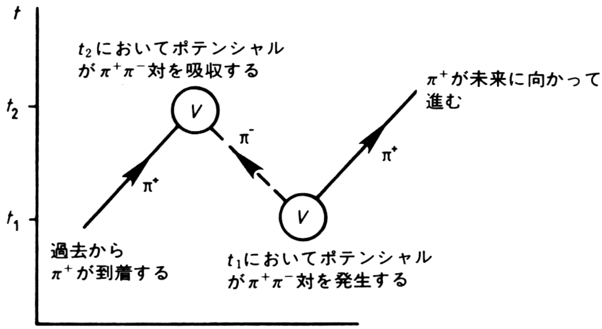


図 3.4　図 3.3 の Feynman による解釈

を用いて，図 3.3 では，正エネルギーの π^+ の解は時間の正の向きにのみ，そして負エネルギーの π^+ の解は時間の負の向きにのみ伝播すると解釈する．したがって t_2 から t_1 へ時間に逆行して運動する π^+ は負エネルギーを指定しなくてはならず，この処方によれば，t_1 から t_2 へ時間に順行して運動する正エネルギーの π^- でなくてはならない．したがって，図 3.4 の図形で表される物理的過程が得られる．

すなわちもっとも基本的な点は，ある粒子を記述する波動方程式の負エネルギー解は，初めの状態と終わりの状態を適当に交換すれば，正エネルギーの反粒子を含む過程を記述するために用いられる，ということである．このようにして，上の対生成のような多体問題の状況を，1 粒子の波動関数のみを用いる定式化で取り扱うことができ，場の量子論の複雑さを避けることができるのである．このことが可能である理由は，物理的過程として電荷が 0 でない 1 粒子は単独では生成されず，つねに（1 または複数個の）対をなしてのみ生成される，という事実にあることは明らかである(電荷の保存)．したがって，われわれの考察した時空間の軌跡は，すべて連続である．あらゆる可能な物理的過程は，粒子の軌跡のみ，もしくは反粒子の軌跡（ともに正エネルギーを持つ）のみによって首尾一貫して正しく記述され，どちらの場合でも（もちろん第 1 の場合をとる習慣であるが)，1 粒子の波動関数で十分である．

次の考察もまた有用であろう．正エネルギーの π^+ に対する電磁カレント

は†，正エネルギーの解の確率の流れに電荷 $Q(=+e)$ を乗じて

$$j^{\mu}_{\mathrm{em}}(\pi^+)=(+e)\times(\text{正エネルギーの } \pi^+ \text{ を表わす解の確率の流れ}) \tag{3.51}$$

で与えられる，と考えることは自然であろう．平面波の解に対しては(問題 3.1 参照)

$$j^{\mu}_{\mathrm{em}}(\pi^+)=(+e)2|N|^2[+(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2},\ \ \boldsymbol{p}] \tag{3.52}$$

が得られる．それでは π^- の流れはどうなるだろうか．正エネルギーの π^- 粒子については

$$j^{\mu}_{\mathrm{em}}(\pi^-)=(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{電荷}}}{-e})2|N|^2[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{正エネルギー}}}{+}(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2},\ \ \boldsymbol{p}] \tag{3.53}$$

となることが期待され，これを

$$j^{\mu}_{\mathrm{em}}(\pi^-)=(+e)2|N|^2[-(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2},\ \ -\boldsymbol{p}] \tag{3.54}$$

のように書けることは明らかである．これは<u>負</u>の 4 元運動量を持つ π^+ の電磁カレントにほかならない．

この結びつきをさらに推し進めることができるだろうか．正エネルギーの π^- を放出する物理系Aの全電荷とエネルギーを考えてみよう (図 3.5)．Aのエネルギーは E だけ減り，電荷も $(-e)$ だけ減る．これはAの電荷が $+e$ だけ増えることと同じである．電荷の増加はまた，π^+ を 1 つ吸収することでも達成される．しかし，この吸収過程を π^+ の放出とまったく<u>同等</u>であるとするためには，π^+ は負のエネルギーを持たなくてはならない．A は放出によってエネルギーを失うからである．したがって，図 3.6 に図式的に書いてあるように，次の等価原理を得る．

<u>正エネルギー</u>の π^- の<u>放出</u>による系のエネルギーと電荷の変化は，<u>負エネルギー</u>の π^+ の<u>吸収</u>と同等である．



図 3.5 π^- を放出する過程

†(訳注) 電流と言うべきであろうが，今後いろいろなカレントが登場するのでこう呼んでおく．

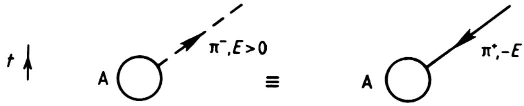


図 3.6　図 3.5 の Feynman による解釈

電荷をほかのすべての適当な量子数に拡張し，エネルギーを 4 元運動量に拡張すれば，次の仮説が得られる．

> 4 元運動量 p^μ を持つ反粒子の放出 (吸収) は，4 元運動量 $-p^\mu$ を持つ粒子の吸収（放出）と，物理的に同等である．

言いかえれば，反粒子を含む過程から粒子のみを含む過程に移行するには，すべての反粒子の 4 元運動量の符号を変え，“入口”と“出口”を表す状態の役割を反対にすればよい．“時間に逆行する”という処方の意味は，このように理解するのである．

上に述べたことは，何もボソンに限られたわけではないことは明らかであろう．スピン 1/2 の場合について，同じことをやってみよう．

3．5　Dirac 方程式の負エネルギー解の Feynman の解釈

Dirac 方程式

$$i\partial\psi/\partial t=(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi \tag{3.26}$$

とその平面波の解

$$\psi=\omega e^{-ip\cdot x} \tag{3.35}$$

に戻る．ここに p^μ は

$$p^\mu=(p^0,\ \boldsymbol{p}) \tag{3.55}$$

で与えられ ω は 4 成分の Dirac スピノールである．4 スピノールをいつものように分解し，2 つの 2 成分スピノール ϕ, χ に対する 2 つの連立方程式

$$\omega=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{3.36}$$

$$p^0\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\mathbf{1} & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{3.56}$$

を得る．まず解のあからさまな形を求めよう．

3. 5. 1 正エネルギーの解

このような解に対しては

$$p^0=+(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2}\equiv E>0 \tag{3.57}$$

である．静止状態の解はどうなるであろうか．このとき

$$p^0=+m,\quad \boldsymbol{p}=0$$

であるから連立方程式は

$$m\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\mathbf{1} & 0\\ 0 & -m\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{3.58}$$

となり，結果

$$\chi=0 \tag{3.59}$$

が得られる．したがって

$$\omega(p^0=+m)=\begin{pmatrix}\phi\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.60}$$

と書く．明らかに静止している正エネルギーの電子に対しては 2 つの独立なスピノール

$$\phi^1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad \text{スピン上向き} \tag{3.61}$$

$$\phi^2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\quad \text{スピン下向き} \tag{3.62}$$

があり，Dirac 方程式がスピン 1/2 の粒子を記述することを示す．

ゼロでない運動量

$$\boldsymbol{p}\neq 0,\quad E=+(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2}=p^0 \tag{3.63}$$

に対しては χ を消去して正エネルギーのスピノールを次の形にとる．

$$\omega^{1,2}=\begin{pmatrix}\phi^{1,2}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^{1,2}\end{pmatrix} \tag{3.64}$$

3．5．2　負エネルギーの解

次に解

$$p^0 = -(\boldsymbol{p}^2 + m^2)^{1/2} \equiv -E \tag{3.65}$$

に見合うスピノールを求めよう（E は常に正と定義する）．静止状態の解はどうなるであろうか．

$$p^0 = -m, \quad \boldsymbol{p} = 0 \tag{3.66}$$

および

$$-m\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & 0 \\ 0 & -m\mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

が成り立つから

$$\phi = 0 \tag{3.68}$$

となる．したがって静止状態の2つの独立な負エネルギー解は

$$\omega(p^0 = -m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

である．有限な3元運動量 $+\boldsymbol{p}$，すなわち4元運動量 $p^\mu = (-E, \boldsymbol{p})$ に対する解は

$$\omega = \begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

である．しかしながら，反粒子の対応

$$\text{正エネルギー解} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \tag{3.71 a}$$

$$\text{負エネルギー解} \sim \mathrm{e}^{+\mathrm{i}p\cdot x} \tag{3.71 b}$$

を用いるために，$p^\mu \to -p^\mu$ に対する解，すなわち $p^\mu = (-E, -\boldsymbol{p})$ を持つ負エネルギー解がかわりに必要である．そこで

$$\omega^{3,4} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

のように定義しよう．もう1つ微妙な点がある．前節で電荷とエネルギーを論じたときのように，“スピン上向き↑”（静止系で定義されたある軸の向き）の欠如は，“スピン下向き↓”の存在と等価であると考える．換言すれば

$$\text{スピン}\downarrow\text{の負エネルギー解}\equiv\text{スピン}\uparrow\text{の正エネルギー解} \tag{3.73}$$

とするのである．そのため

$$\chi^1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \chi^2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{3.74}$$

のようにとる．負エネルギー・スピノールの指標 E，$\boldsymbol{p}$，1，2 はしたがって物理的な反粒子の値を表す．次に負エネルギー解と正エネルギー解の関係を詳細に述べよう．

3.5.3 負エネルギー解の Feynman の解釈

Dirac 方程式はエネルギーの符号によらない確率密度およびカレント

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\psi^\dagger\psi\\ \boldsymbol{j}&=\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi\end{aligned}\right\} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{3.75}$$

を生ずるようにあからさまに工夫されている．これが KG 方程式と Dirac 方程式の違いである．したがって

$$\psi=\omega\phi(\boldsymbol{x},\ t) \tag{3.76}$$

の形のどのような解に対しても

$$\rho=\omega^\dagger\omega|\phi(\boldsymbol{x},\ t)|^2 \tag{3.77 a}$$

$$\boldsymbol{j}=\omega^\dagger\boldsymbol{\alpha}\omega|\phi(\boldsymbol{x},\ t)|^2 \tag{3.77 b}$$

が得られて，つねに $\rho\geqq 0$ である．にもかかわらず，正エネルギーの解は電子を記述し，入射波と射出波の方向を逆にするならば負エネルギーの解が陽電子を記述するような対応を作りたいのである．KG 粒子の場合これは問題がない．確率の流れは 4 元運動量に比例するからである．

$$j^\mu(\mathrm{KG}) \sim p^\mu \tag{3.78}$$

したがって，π^+ および π^- の電磁カレントの対応は次のようにとることができる．

$$\pi^+ : j^\mu_{\mathrm{em}}\sim ep^\mu \quad \text{正エネルギーの } \pi^+ \tag{3.79 a}$$

$$\pi^- : j^\mu_{\mathrm{em}} \sim (-e)p^\mu \quad \text{正エネルギーの } \pi^- \tag{3.79 b}$$

$$\equiv(+e)(-p^\mu) \quad \text{負エネルギーの } \pi^+ \tag{3.79 c}$$

この簡単な関係は Dirac 粒子には成り立たない．エネルギーの符号いかんにかかわらず $\rho\geqq 0$ だからである．この場合も対応をたてることができるが，終わりの状態に負エネルギーのフェルミオンがいる場合はいつも，余分な負号を 1

つ“手で”入れてやらなくてはならない．第6章で示すように，これは e^+ 散乱の行列要素が e^- 散乱の行列要素と反対の符号を持つことを保証する．これは物理的要求にほかならない．したがってフェルミオンに対する Feynman の仮説は次のように述べられる．

> 4元運動量 p^μ，静止系でのスピノール射影 s_z を持つ反フェルミオンを放出（吸収）する不変振幅は，4元運動量 $-p^\mu$，静止系でのスピノール射影 $-s_z$ を持つフェルミオンを吸収（放出）する振幅（振幅に負号をつけたもの）に等しい．

3.6　ゲージ原理による電磁相互作用の導入

相対論的なスピン0およびスピン1/2の自由粒子の波動方程式を提示したので，第2章に展開した手法を用いて，電磁相互作用を含めることができる．実行すべきことは置き換え

$$\partial^\mu \to D^\mu \equiv \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu \tag{2.33}$$

を電荷 q の粒子に対して行うことである．スピン0の KG 方程式(3.1)に対しては，少し項を並べかえて（問題(3.6)参照）

$$(\Box + m^2)\phi = -\mathrm{i}q(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\phi + q^2 A^2 \phi \tag{3.80}$$

$$\equiv -\hat{V}_{\mathrm{KG}}\phi \tag{3.81}$$

を得る．ポテンシャル $\hat{V}_{\mathrm{KG}}$ は微分演算子 ∂_μ を含むことに注目せよ．$\hat{V}_{\mathrm{KG}}$ の符号は，$\boldsymbol{\nabla}^2$ と $\hat{V}$ の間に Schrödinger 方程式と同じ相対的な符号が現れるようなとり方を便宜的にしている．スピン1/2の Dirac 方程式(3.26)に対しては，同じやり方により

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m + \hat{V}_{\mathrm{D}})\psi \tag{3.82}$$

を得る．ここに $\hat{V}_{\mathrm{D}}$ は

$$\hat{V}_{\mathrm{D}} = qA^0\mathbf{1} - q\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A} \tag{3.83}$$

で与えられる．$\hat{V}_{\mathrm{D}}$ は4行4列の行列

$$\hat{V}_{\mathrm{D}} = q\begin{pmatrix} A^0 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} & A^0 \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

で，4 成分の Dirac スピノールに働くことに注意せよ．このようにして，スピン 0 およびスピン 1/2 の粒子の電磁相互作用は，ゲージ原理により完全に決定されてしまう．（第 8 章で見るように，スピン 1 の粒子に対してはこう簡単にはいかない．）

まとめ

(1) KG方程式が導入されたが，負エネルギーの解と負の確率の困難のゆえに放棄された．

(2) Dirac 方程式は，負の確率の問題を解決するが，それでもなお負エネルギーの解を許す．Dirac 方程式は 4 成分スピノールで記述され，Dirac 行列は反交換関係を満たす．

(3) Dirac の海は，Dirac 方程式の負エネルギー解を反粒子の概念によって再解釈する．

(4) Feynman の処方は，Dirac 方程式および KG 方程式の負エネルギー解を同じ基盤で再解釈することを許す．

(5) ゲージ原理により電磁相互作用を含める．

問題

3. 1 (a) 自然単位系 $c=\hbar=1$ をとり，さらに $2m=1$ とする単位をとれば，Schrödinger 方程式は

$$-\nabla^2\psi+V\psi-\mathrm{i}\partial\psi/\partial t=0 \tag{3.1.1}$$

と書ける．この方程式に左から ψ^* を乗じ，またこの方程式の複素共役に右から ψ を乗じ，辺々相減じて連続方程式

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{3.1.2}$$

を導け．ただし V は実数と仮定し，かつ

$$\rho=\psi^*\psi,\quad \boldsymbol{j}=\mathrm{i}^{-1}[\psi^*(\nabla\psi)-(\nabla\psi^*)\psi] \tag{3.1.3}$$

と定義する．

(b) 同じ演算を KG 方程式に行い，対応する“確率密度”と確率の流れを導け．自由粒子の解

$$\phi=N\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \tag{3.1.4}$$

に対して，確率の4元カレント $j^\mu=(\rho,\ \boldsymbol{j})$ は運動量 p^μ に比例することを示せ．ただし $p^\mu=(E,\ \boldsymbol{p})$ である．

3．2　(a)　2行2列の Pauli 行列をあからさまに用いて，交換関係（角括弧，中括弧）と反交換関係（大括弧）

$$[\sigma_i,\ \sigma_j]=2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \{\sigma_i,\sigma_j\}=2\delta_{ij}\mathbf{1} \tag{3.2.1}$$

を証明せよ．和の記法の慣習については付録Aの脚注を参照せよ．ただし，ε_{ijk} はいつもの反対称テンソル

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases} +1 & \text{123 の偶順列に対して} \\ -1 & \text{123 の奇順列に対して} \\ 0 & \text{2つ以上の指標が等しいとき} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

である．δ_{ij} は Kronecker のデルタ，$\mathbf{1}$ は2行2列の単位行列である．これから次の式を証明をせよ．

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}\mathbf{1}+\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{3.2.3}$$

(b)・上の最後の恒等式を用いて

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\mathbf{1}+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{3.2.4}$$

を証明せよ．$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ のあからさまな2行2列の行列型式

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p_z & p_x-\mathrm{i}p_y \\ p_x+\mathrm{i}p_y & -p_z \end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

を用いて

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=\boldsymbol{p}^2\mathbf{1} \tag{3.2.6}$$

を示せ

3．3　Dirac 方程式の自由粒子解

$$\psi=\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \tag{3.3.1}$$

において，4成分スピノール ω は2つの2成分スピノールを用いて次のように書ける．

$$\omega=\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

ψ に関する Dirac 方程式

$$\mathrm{i}\partial\psi/\partial t=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi \tag{3.3.3}$$

から，Dirac 行列のあからさまな形

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

を用いて，ϕ と χ が連立方程式

$$(E-m)\phi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi, \qquad (E+m)\chi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi \tag{3.3.5}$$

を満たすことを示せ．ただし $p^\mu=(E,\ \boldsymbol{p})$ である．

3. 4　(a)　問題3. 3の行列 $\boldsymbol{\alpha}$, β を用いて，直接 Dirac の反交換関係式(3.32)を証明せよ．4つの“γ 行列”を

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= (\gamma^0,\ \boldsymbol{\gamma}) \\ \gamma^0 &= \beta,\ \ \boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

で定義して，Dirac 方程式を $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$ の形に書けることを示せ．また γ 行列の反交換関係を求めよ．

(b)　共役スピノールを

$$\bar{\psi}(x)=\psi^\dagger(x)\gamma^0 \tag{3.4.2}$$

で定義し，上の結果を用いて，$\bar{\psi}$ の満たす方程式を γ 行列記法で導け．

(c)　Dirac の確率の流れは

$$j^\mu=\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{3.4.3}$$

と書ける．連続方程式

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0 \tag{3.4.4}$$

が成立することを示せ．

3. 5　のちに6. 1節で論ずるように，正エネルギーのスピノール $u(p,\ s)$ を式(3.64) とは因子だけ異なる形

$$u(p,\ s)=(E+m)^{1/2}\begin{pmatrix} \phi^s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^s \end{pmatrix} \qquad s=1,2 \tag{3.5.1}$$

に書く習慣である．このスピノールは $u^\dagger u=2E$ を満たすことを示せ．

同様に，負エネルギーのスピノール $v(p,\ s)$ は

$$v(p,\ s)=(E+m)^{1/2}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \qquad s=1,\ 2 \tag{3.5.2}$$

で定義される．$v^\dagger v=2E$ となることを示せ．

3. 6　KG 方程式と置き換え $\partial^\mu \to \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu$ を用いて，結果の式

$$(\Box + m^2)\phi = -\hat{V}_{\mathrm{KG}}\phi \tag{3.6.1}$$

に表れるポテンシャル $\hat{V}_{\mathrm{KG}}$ の形を A^μ を使って表せ．

父が私に語ってくれたのはすばらしい世界でした．

父がその世界から得たものは結局何だったと思いますか．私はマサチューセッツ工科大学へ進み，プリンストン大学を終え，帰宅した時父はこう申しました．

“さてお前も科学の教育を終えた．私にはどうにもわからないことがあって，いつも知りたいと思っていたことがある．それを説明してくれないか，お前．”私は“どうぞ”と答えました．

“光は原子が１つの状態からほかの状態へ，励起状態からよりエネルギーの低い状態へ移るとき出る，ということだ．”

私は“そのとおり”と答えました．

“光は一種の粒子だという．光子と呼んでいたと思うが．”

“そうです．”

“原子が励起状態から下の状態に移るとき光子が出てくるというなら，励起状態の原子の中に光子はいたはずだ．”

“うーむ．でもそうじゃありません．”

“それなら，励起状態の中になかった光子という粒子が出てくるのを，どう説明するのかね．”

私は数分間考えましたが，“すみません．わかりません．どうにも説明できない．”と言いました．

父は私に何か教えようと何年も何年も苦労したあげくに，こんな貧弱な結果にしかならなかった，と失望したのでした．

R. P. Feynman，物理教師誌，7 巻 6 号 (1969 年 9 月号)

50 年間も意識して問題をあたためながら，私はまだ“光の量子とは何か”という問題の答に，少しも近づいておりません．もちろん今日では，誰もが答を知っていると思っています．しかしそれはみずからを欺いているにすぎません．

A. Einstein，1951．

E. Wolf，光学ニュース，**5**，1，p. 39 (1979)，“光の本性に関する Einstein の研究”より引用

私は物事の力学的モデルを作ることができない限り，満足できません．力学的モデルが作れてこそ，私は理解できるのです．一貫した力学的モデルが作れなければ，私は理解できたとは言いません．私が電磁気学を理解できないのは，そのせいであります．

Sir William Thomson (Kelvin 卿，1884)

ジョンズ-ホプキンス大学で行った“分子の力学と光の波動説”の講義ノートより．

A. S. Hathaway による速記録（ジョンズ-ホプキンス大学，バルチモア）の“講義ＸＸ”，p. 270～271．

第4章　場の量子論

この章では，場の量子論の初等的解説を行う．場の量子論は物質と力の基礎理論を記述するために，現在用いうるもっとも有用な“言語”である．Maxwellの古典電磁場の理論から長い時間たっても，“遊離した”場の概念はたやすくわかるものではない．しかもそれに量子力学の複雑さを付け加えよう，というのである．このような状況のもとでは，何か物理的な模型を考えるのが役に立つ．大部分の人間にとって，模型とは力学的な模型である．したがって次の2節では，場の量子論の力学的模型を考えることからはじめよう．最後に，Maxwellのように，“足場”をとり払ってたんなる場の量子論へ移行しよう．この新しい現実相は，なんの支持枠をも必要としない．4.1節はこの計画を定性的に扱い，4.2節はより完全な定式化をねらう．

4.1　量子場　(i)記述的取り扱い

力学系はふつう自由度の数で特徴づけられる．1次元の振子は自由度1を持ち，連動した2つの1次元振子は自由度2（例えばそれぞれの角変位）を持つ．スカラー場 $\phi(\boldsymbol{x},\ t)$ は無限個の自由度を持つ系に対応する．連続的に変わる座標 $\boldsymbol{x}$ の各点に，独立な“変位” $\phi(\boldsymbol{x},\ t)$ が決められ，それが時間とともに変化するからである．したがって，場の量子論は2つの主な数学的段階を踏むことになる．第一は，無限個の自由度を持つ連続力学系（場）の記述であり，次にこのような系に量子論を適用することである．この2つの面は確かに別々に考察できる．明らかに，非常に大きくてもよいが離散的な自由度，たとえば固体，の系からはじめるのが容易である．このような系をまず古典力学的に，ついで量子力学的に取り扱おう．それから再び古典的な場合に戻り，自由度の数が無限大になるようにし，古典場に対応する系を求めよう．最後に，量子力学を直接場に適用しよう．

はじめに，自由に運動する2つの原子（質点）から成る小さな固体を考える．それぞれ質量 m を持つ原子は糸でつながれ，同じような糸で固定端に結ばれているとする（図4.1(*a*)）．糸にはすべて張力 T が働く．ここで原子の小さな横振動（図4.1(*b*)）を考え，垂直変位を $q_r(t)(r=1,\ 2)$で表す．この系の全エネルギー E に関心があるが，古典力学によれば，これは個々の原子の運動エネルギー $1/2m\dot{q}_r^2$ と，次のようにして計算できるポテンシャルエネルギー V の和に等しい．図4.1(*b*)から，原子1が q_1 だけ変位したとき復元力

$$F_1=T\sin\alpha-T\sin\beta \tag{4.1}$$

が働く．ただし糸全体にわたって一定の張力 T が働くと仮定した．小さな変位 q_1，q_2 に対して

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=q_1/(l^2+q_1^2)^{1/2}\approx q_1/l\\ \sin\beta&=(q_2-q_1)/[l^2+(q_2-q_1)^2]^{1/2}\approx(q_2-q_1)/l\end{aligned} \tag{4.2}$$

であるから，この近似で粒子1に働く復元力は

$$F_1=k(2q_1-q_2) \tag{4.3}$$

である．ただし $k=T/l$ である．同様に粒子2に働く復元力は

$$F_2=k(2q_2-q_1) \tag{4.4}$$

であり，運動方程式は

$$m\ddot{q}_1=-k(2q_1-q_2) \tag{4.5}$$

$$m\ddot{q}_2=-k(2q_2-q_1) \tag{4.6}$$

となる．ポテンシャル・エネルギーは（問題にしないでよい）定数を別にして，式(4.4)，(4.5) が

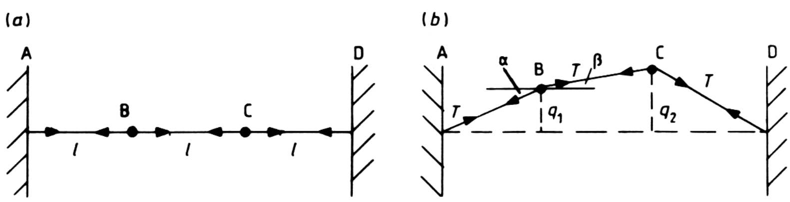


図4.1　2つの自由度を持つ振動系　(*a*)　2つの質点は静止し糸は張力を及ぼしている　(*b*)　微小横振動

$$m\ddot{q}_1 = -\partial V/\partial q_1 \tag{4.7}$$

$$m\ddot{q}_2 = -\partial V/\partial q_2 \tag{4.8}$$

と書けるような V である．このようにして

$$V = k(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2) \tag{4.9}$$

が導かれる．

方程式(4.5) と (4.6) は，連立微分方程式で，q_1 を決める方程式の右辺は q_1 のみならず q_2 も含み，q_2 の方程式についても同様である．この“数学的”結合は V の中の項 $-kq_1q_2$ にその出所があるが，これは 2 つの原子を結んでいる糸 BC の“物理的”結合に対応する．もしこの結合がなければ，方程式(4.5) と (4.6) は 2 つの独立な（結合していない）調和振動子を表し，それぞれ振動数 $(2k/m)^{\frac{1}{2}}$ で振動する．この結合があると，方程式(4.5)，(4.6) の解はそれほど自明ではない．しかし，簡単な数学的工夫で方程式はずっとやさしくなることがわかる．2 つの方程式を足し合わせると

$$m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = -k(q_1 + q_2) \tag{4.10}$$

となり，引き算をすると

$$m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -3k(q_1 - q_2) \tag{4.11}$$

になる．もともとの座標 q_1，q_2 の 2 つの組み合わせ $(q_1 + q_2)$ と $(q_1 - q_2)$ は，結合していない方程式を満たす，という顕著な結果が得られ，非常に簡単に解くことができる．組み合わせ $(q_1 + q_2)$ は振動数 $\omega_1 = (k/m)^{1/2}$ で振動し，組み合わせ $(q_1 - q_2)$ は振動数 $\omega_2 = (3k/m)^{1/2}$ で振動する．

ここで新しい量 Q_1，Q_2

$$Q_1 = (q_1 + q_2)/\sqrt{2}, \qquad Q_2 = (q_1 - q_2)/\sqrt{2} \tag{4.12}$$

を導入しよう．$\sqrt{2}$ はのちの便宜のためである．方程式 (4.10)，(4.11) の解は

$$Q_1(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t \tag{4.13}$$

$$Q_2(t) = C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t \tag{4.14}$$

である．初期条件が

$$q_1(0) = q_2(0) = a, \qquad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0 \tag{4.15}$$

すなわち原子を同じ垂直距離 a だけ上げて静かに離したとすると，条件 (4.15) は

$$Q_2(0)=\dot{Q}_2(0)=0$$

$$Q_1(0)=\sqrt{2}a, \qquad \dot{Q}_1(0)=0 \tag{4.16}$$

となる．したがって式(4.13)，(4.14)よりこの初期条件に対する完全な解は

$$Q_1(t)=\sqrt{2}a\cos\omega_1 t \tag{4.17 a}$$

$$Q_2(t)=0 \tag{4.17 b}$$

となる．解(4.17 b) より，運動はつねに $q_1=q_2$ であり，解(4.17 a) より系はただ1つに定まった振動数 ω_1 で振動する．系が全体として1つの決まった振動数で運動する形態を“正規様式”あるいは単に“様式（モード）”と呼ぶ．図 4.2 (a) は，2原子系が $q_1=q_2$ で特徴づけられるモードで運動するときの“瞬間”配位を表す．このモードでは $Q_1(t)$ のみが変化し $Q_2(t)$ はつねにゼロである．いつも $q_1=-q_2$ であるような別のモードも存在し，そのとき $Q_1(t)$ はゼロで $Q_2(t)$ が振動数 ω_2 で運動する．図 4.2 (b) は，原子がこの第二のモードで運動するときの2つの瞬間写真を表す．このような“単一振動数を持つ運動”を起こすような座標の組み合わせ Q_1，Q_2 を“正規振動様式の座標”あるいは略して“正規座標”という．

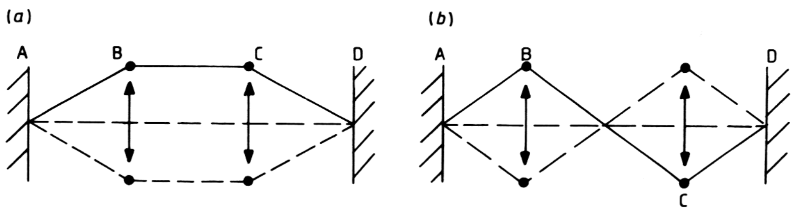


図 4.2　2つの基準モード　(a)　振動数 ω_1　(b)　振動数 ω_2

一般に，初期条件は純粋に単一モードの運動を引き起こすものばかりとは限らないから，$Q_1(t)$ も $Q_2(t)$ もゼロではない．式(4.12)から

$$q_1(t)=[Q_1(t)+Q_2(t)]/\sqrt{2} \tag{4.18}$$

$$q_2(t)=[Q_1(t)-Q_2(t)]/\sqrt{2} \tag{4.19}$$

であるから，q_1，q_2 はそれぞれ振動数 ω_1，ω_2 で振動する2つの項の和で表される．すなわち系は“2つのモードの重ね合わせ”である．にもかかわらず，次

に示すように，モードの概念は全エネルギーに関して非常に重要である．運動エネルギーは正規座標 Q_r で

$$T=\tfrac{1}{2}m\dot{Q}_1^2+\tfrac{1}{2}m\dot{Q}_2^2 \tag{4.20}$$

と書かれ，ポテンシャルエネルギーは

$$V=\tfrac{1}{2}m\omega_1^2Q_1^2+\tfrac{1}{2}m\omega_2^2Q_2^2\equiv V(Q_1,\ Q_2) \tag{4.21}$$

となる．したがって全エネルギーは

$$E=[\tfrac{1}{2}m\dot{Q}_1^2+\tfrac{1}{2}m\omega_1^2\dot{Q}_1^2]+[\tfrac{1}{2}mQ_2^2+\tfrac{1}{2}m\omega_2^2Q_2^2] \tag{4.22}$$

となる．この式は，正規座標で書けば全エネルギーは $Q_1\cdot Q_2$ という形の結合項を含まず，実際2つの独立な非結合振動子の単純な和で表されるという顕著な形を持っている．振動子の1つは固有振動数 ω_1 を持ち，他は ω_2 を持つ．エネルギー式(4.22)は正確に，それぞれが単振動を行う2つの相互作用をしていない“もの”の系で成り立つ．ここで“もの”とは，実は2つのモードである．もともとの原子は相互作用をしているが，モードは相互作用をしていない．（1つ注意をしておかなくてはならないが，これは $V(q_1,\ q_2)$ の中で2次を超える項を無視したときにのみ成り立つ．このような高次の“非調和的”補正は，モード間の結合をもたらす（4．3節参照））．もちろん，全エネルギーの非結合性は Q 変数の運動方程式の非結合性の中に反映される．

$$m\ddot{Q}_r=-\frac{\partial V(Q_1,\ Q_2)}{\partial Q_r},\quad r=1,\ 2 \tag{4.23}$$

この系はちょうど2つの自由度を持つ．われわれはまず，2つの原子の物理的な変位という自明な自由度で系を記述することからはじめた．しかし，正規座標の組み合わせ Q_1, Q_2を用いると非常にわかりやすいことを見い出した．正規座標が実は適切な自由度なのである．もちろん，単に2粒子の場合は，q_r をとるか Q_r をとるかは純理的なものにすぎないように思われる．しかし重要な点は，そしてこの簡単な計算を詳しく追ってみせた理由は，正規モード・正規座標の基本的な考え方は，直ちに自明ではない N 原子問題（さらに場の問題）にも拡張できるからである．N 原子系には1次元の変位が N 自由度だけあり，それを実際の原子の変位にとると，全エネルギーは

$$E=\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{q}_r^2+V(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_N) \tag{4.24}$$

となる．これはすべての原子間の結合を含む．前と同じく q_rは十分小さく，V の中で 2 次の項だけが効くと仮定する．この時式 (4.12) を拡張して，変数の線型変換

$$Q_r=\sum_{s=1}^{N}a_{rs}q_s \tag{4.25}$$

によって，式(4.22)のように E を N 個の分離独立した和に書くことができる．

$$E=\sum_{r=1}^{N}\left[\tfrac{1}{2}m\dot{Q}_r^2+\tfrac{1}{2}m\omega_r^2Q_r^2\right] \tag{4.26}$$

Q_r は正規座標，ω_r は正規振動数でいずれも N 個ある．もし Q_r のうち 1 つだけがゼロでなければ，N 個の原子は 1 つのモードで運動する．式 (4.26) で表される全エネルギーが，N 個の単一モードのエネルギーの和であることは，N 個の粒子からなる固体があたかも N 個の独立した自由調和振動子のようにふるまう，といってよい．しかしこの調和振動子は原子のもとの座標の振動ではない．断定的にもう一度繰り返すと，関連する自由度はもとの粒子の自由度ではなくモード座標なのである．

さてわれわれの計画の第二段階は，このような系を量子力学的に取り扱うことである．実際の固体については，確かに量子力学を適用しなくてはならない．ポテンシャルエネルギーが変位の 2 次式であれば，変換 (4.25) が全エネルギーを N 個のモード・エネルギーの和として与え，そのそれぞれは調和振動子の形を持つ，ということは依然正しい．しかし，今やこれらの振動は量子力学の法則に従う．したがってそれぞれのモード振動子は，エネルギーの固有値が量子化されたある確定した状態にだけ存在するはずである．振動数 ω_r のそれぞれのモードについて，許されるエネルギーの値は

$$\varepsilon_r=(n_r+\frac{1}{2})\hbar\omega_r \tag{4.27}$$

である．n_r はゼロまたは正の整数である．これが古典的な場合と鋭い対比を成すところで，古典論では振動エネルギーは任意の値をとることができる．したがって全エネルギーは

$$E=\sum_{r=1}^{N}(n_r+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_r \tag{4.28}$$

の形をとる．振動数 ω_r は原子間力によって決まり，古典力学でも量子力学でも

共通である．しかし量子論では，振動する N 体系の確定したエネルギーを持つ状態は，整数値の一組 $(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_N)$ の値によって指定される．これらの整数は，それぞれのモード振動子のエネルギーを決定する．

それぞれのモード振動子に対し，$\hbar\omega_r$ は振動エネルギーの量子を測る升目である．許されるモード状態のエネルギーは，この状態に存在する量子の数 n によって一意に決定される．さてここで，この結果のきわめて深遠な再解釈を行う．これは Born, Heisenberg および Jordan (1926) によって，ほとんどついでのことながらという形ではじめて指摘されたのであった．もともとの N 個の自由度 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_N$ と N 個の“原子”を忘れてしまおう．これらはいずれも N 個の異なるモード振動数 ω_r が存在する，という事実を通じて式(4.28)の中で思い出されるのみである．そのかわり，量子に注目して，それらを実際に量子系のふるまいを決める“もの”として取り扱う．“エネルギー $(n_r+1/2)\hbar\omega_r$ で与えられる状態には，n_r 個の量子が存在する”という．$(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_N)$ で指定される状態には，モード1（振動数 ω_1）の量子が n_1 個，モード2の量子が n_2 個，……モード N の量子が n_N 個存在する，という．モードの数 N は(今までのところ)有限であるが，n_r の値は全エネルギーの値が決まっているのでない限り制限されていないことに，特に注意をして欲しい．したがって，“きまった数”（自由度 N）の描像から，“変わる数”（n_r は全エネルギー式(4.28)の制限しか受けていない）の描像に移行しつつあるのである．現実の固体の場合，振動エネルギーの量子はフォノン（音響量子）と呼ばれる．われわれの到達した論点を，次の重要な主張にまとめておく．フォノンは振動励起の素量子である．

さて，あとで2歩進むためにここで1歩下がろう．調和的に相互作用する N 自由度の古典力学的模型に戻る．自由度 N と原子間隔 a を，積 Na が有限，例えば $Na=L$ であるように保ちながら，N を無限大に a をゼロに近迫させると，古典的な連続系，例えば長さ L の糸(簡単にするため1次元のままにしておく)が得られる．この糸の垂直変位は場 $\phi(x,\ t)$ で記述され，糸のそれぞれの点 x において，$\phi(x,\ t)$ は点 x の周りの糸の微小部分の時刻 t における平衡位置からの変位を表す．このようにして，離散的な自由度 $q_r(t)$ または $Q_r(t)$ で記述される系から，連続的な自由度で記述される系すなわち変位の場 $\phi(x,\ t)$ に移行したのである．離散的な指標 r は連続的な引数 x となる．のちの抽象化に備えて，

例えば $q(x,\ t)$ と書くかわりに $\phi(x,\ t)$ と記しておいた．

連続系の問題では，離散的な場合にポテンシャルエネルギーを2次までに制限する微小変位の仮定にあたるものは，$\phi(x,\ t)$ が波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(x,\ t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{4.29}$$

を満たすことである．ここで c は波の伝播の速度を表す．再び，最初にこの系の古典力学的取り扱いを考えよう．目的は，この連続的な場の問題に対して，離散的な場合あんなに役に立った正規座標（物理的にいえば振動のモード）にあたるものを見出すことである．幸いにして糸の振動モードはよく知られている．糸の両端で然るべき境界条件を課すことにより，糸に沿って伝わる波の可能な波長を決定しよう．簡単にするため糸は $x=0$ と $x=L$ の間に張られているとする．これは $\phi(x,\ t)$ が両端でゼロになるという制約を課す．このような $\phi(x,\ t)$ の形は

$$\phi^{(r)}(x,\ t)=A_r(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{4.30}$$

で与えられる．$r=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ は，間隔 $(0,\ L)$ の間に適合しなくてはならない半波長の正確な数を表す．解(4.30) を波動方程式(4.29) に代入すれば

$$\ddot{A}_r=-\omega_r^2A_r \tag{4.31}$$

となり，振動数 ω_r は

$$\omega_r^2=r^2\pi^2c^2/L^2 \tag{4.32}$$

で与えられる．このように，特定の波の形(4.30)の振幅 $A_r(t)$ は，振動数 ω_r の単振動を行う．きまった波長を持つ糸の運動のそれぞれはきまった振動数を持つから，まさしくモードである．図4.3 (a) は $r=1$ のモードで振動する糸の2つの瞬間写真であり，図4.3 (b) は $r=2$ のモードで振動する糸の2つの瞬間写真である．これらは図4.2 (a)，4.2 (b) と対比すべきものである．離散的な場合と同じく，糸の一般的運動はモードの重ね合わせ

$$\phi(x,\ t)=\sum_{r=1}^{\infty}A_r(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{4.33}$$

で表される．簡単に言えば，これは Fourier 級数である．

さて，振動する糸の全エネルギーを調べてみなくてはならない．モードの概



図 4.3　2 つの基準モードを持つ弦の運動　(*a*)　本文の方程式 (4.30) で $r=1$ に対応する (b)　$r=2$ に対応する

念を用いれば，おおいに簡略化できると期待される．離散的な場合の和(4.24)に対応する連続系の全エネルギーは積分

$$E=\int_0^L\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{4.34}$$

である．ここで第 1 項は運動エネルギー，第 2 項はポテンシャルエネルギーを表し，糸の単位長さあたりの質量 ρは一定と仮定した．式(4.33) を式(4.34) に代入し，領域 $(0,\ L)$ 間における正弦関数の直交性を使うと決定的に重要な結果

$$E=(L/2)\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\rho\dot{A}_r^2+\frac{1}{2}\rho\omega_r^2A_r^2\right] \tag{4.35}$$

が導かれる (問題 4.1 参照)．実際，離散的な場合と同じように，糸の全エネルギーはそれぞれのモードのエネルギーの和として書かれている．Fourier 振幅 A_r が正規座標の役割を果たすことがわかる．式(4.35) と式(4.26) を比較すると，糸はまさしく独立な結合していない振動子の系のようにふるまう．ただ 1 つの違いは，連続的な場 $\phi(x,\ t)$ の無限大の自由度に対応して，振動子の数が無限個あることである．正規座標 $A_r(t)$ は，いろいろな点でもとの変位 $\phi(x,\ t)$ よりずっと直接関係の深い自由度の組である．

さて最後の段階は，量子力学をこの古典場の系に適用することである．再び，全エネルギーは (無限に多くの) モード振動子のエネルギーの和になっており，それぞれが量子化されていなくてはならない．全エネルギーの固有値は，和が無限大にまで拡張されることを除いては，式(4.29) の形を持つ．

$$E=\sum_{r=1}^{\infty}(n_r+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_r \tag{4.36}$$

量子化された場 $\phi(x,\ t)$ の励起状態は，それぞれの振動数のフォノンが何個存在するか，という言いかたで表される．基底状態にはフォノンは 1 つも存在

しない．$L\to\infty$ に近迫させると，式(4.35) あるいは式(4.36) の中のモードに関する和は連続的な振動数に関する積分で置き換えられる．

概略ではあるが，はじめに述べた計画を完遂して，“力学的”な場の量子化に到達した．今まで述べたことは，現代の固体物理にとってまったく基本的な議論であることを，明確に強調しておかなくてはならない．その本質的な考え方，独立なモードを量子化することは，いろいろほかの“振動”に対しても適用することができる．どの場合でも，決定的に重要な概念は素励起，すなわちモードの量子である．フォノン（振動量子）のほかに，プラズモン（プラズマ振動の量子)，マグノン (磁気振動の量子) などがある．これらは多体系の物理で確立された量子である．

さて本書で実際に取り扱う量子場（例えば電磁場）はおそらく力学的とは言えないが，それを理解するために上の概念を類推として用いるところにきた．電磁場を含む空間の領域を考えよう．場は波動方程式(4.29)（の3次元的な形）を満たし，c は光の速度を表す．然るべき境界条件を課せば，空間のどの領域の全電磁エネルギーも，モード・エネルギーの和として書くことができる．与えられた波長に対しそれぞれのモードは振動子の形を持ち，振幅(式(4.30)参照)は波の Fourier 成分である．振動子はそれぞれ量子化されている．その量子を光子と呼ぶ．したがって光子は，電磁場の励起の素量子である．

ここまででは，相対論的場の量子論の世界でただ一種類の“粒子”は光子であった．それでは電子はどうなるのであろうか．再び Feynman を引用しよう．“しかし，電子もまた光と同じようにふるまう，という幸運がある”．言いかえると，電子もまた“電子場”の素量子励起であるとみなすことができるのである．電子場に対しては，振動を起こさせるような“高まり”とは何であろうか．光子について答がなかったと同じく，この疑問に対しても答はない．あるしかるべき波動方程式に従う電子に対して — この場合は相互作用をしていない電子に対しては Dirac 方程式 — 相対論的場の量子論を仮定するのである．電磁場の場合と同じく，場は Fourier 成分の和に展開される．それぞれの成分は独立な振動子の自由度としてふるまい(もちろん無限に多くの自由度がある)，これらの振動の量子が電子である．

基本概念は正しく述べてあるが，実はこの議論は1つ決定的な点を省略して

おり，この点がまるで人を欺くように簡単化されてしまっている．もちろん，光子と電子の間には大きな違いがある．前者はボソン（ボーズ粒子）で後者はフェルミオン（フェルミ粒子）である．光子はスピン角運動量1（$\hbar$を単位として）を持ち，電子は1/2を持つ．まったく不可能だと言わないが，フェルミオン的励起を持つ力学的模型を作ることは，極めて難しい．フォノンはスピン1を持ち，実際対応する振動波の3つの偏りの状態に対応する．しかしスピン1/2を持つ“フォノン”は理解しがたい．それでもよい，と言えるであろうか．Maxwellが離乳させてくれたのだからわれわれも成長して，電子場をある基本的な“もの”と仮定する大胆さを持ってよいのであろう．

たしかに，これがわれわれのしていることである．電子のようなフェルミ粒子は，禁制律に従わなくてはならないことも知られている．2つの同種のフェルミオンは同じ量子数を持つことはできない．この原理が，電子の場の量子的描像でどうなるか，その結果の一部はのちの節で論ずる．しばらくの間，世界は2種類の基本的な場，“力の場”と“物質の場”から成るようにみえる，という事実だけを記録しておこう．力の場の量子はボソンであり（電磁場の量子が光子であるように），物質の場の量子はフェルミオン（電子のように）である．世界を構築するためには，一組の物質場（たとえばクオークとレプトン）と一組の力の場（たとえば電弱場・強い力の場・重力場）を仮定し，それらがすべてどのように相互作用するかを説明しなくてはならない．ゲージ原理を用いて，これがのちの章で行うことである．

4.2　量子場　(ii)Lagrange-Hamilton流の定式化

4.2.1　作用原理，ラグランジアン粒子力学

いままで述べた定性的な描像を数学的に精密化しなくてはならない．場の力学も粒子の力学も，古典論も量子論も，1つの包括的な枠組みの中で取り扱えるような定式化が望ましいことは明らかである．すばらしいことだが，このような枠組みが現実に存在する（量子論よりずっと前に展開された）．これがHamiltonの最小作用の原理である．ここで“作用”はラグランジアンを用いて定義される．物理法則に対するこの深遠な接近法についてまだ知らない読者には，Feynmanの“物理学講義”(1964) 第2巻，第19章を熟読することを強く

おすすめする.

最小作用の方法は,便宜的に"Newton 流の"と呼ばれているなじみ深い方法とは根本的に異なる.もっとも簡単な古典粒子力学の場合を考えよう.Newton 流の方法では,力を本質的な物理的入力として含む運動方程式が仮定され,これから粒子の軌道が計算される.最小作用の方法では,運動方程式は基礎的なものとして仮定されないで,力よりもポテンシャルが根元的な役割を果たす.粒子が実際にたどる径路は,無限に多くの可能な径路のうちで,作用と呼ばれる量が極小になるような特定の径路である,という仮定(あるいは原理)によって決められる.作用 S は

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\ \dot{q}(t))\mathrm{d}t \tag{4.37}$$

で定義される.ここで $q(t)$ は時間の関数としての粒子の位置,$\dot{q}(t)$ は速度,もっとも重要な関数 L はラグランジアンである.変数 $q(t)$, $\dot{q}(t)$ のあからさまな関数としての L が与えられると,時刻 t_1 から出発し時刻 t_2 に終わるあらゆる可能な $q(t)$ について S が計算できると考えられる.図 4.4 に示すように,q と t を軸とする図の上に,いろいろ可能な軌道(トラジェクトリ)を描くことができる.それぞれの軌道に沿って S を計算すると,仮定によって,現実の径路は S が最小になるものである.

しかし L とはいったい何者であろうか.簡単な場合には,以下で証明するように,L は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの差 $T-V$ である.したがってポテンシャル V の中を運動するただ1つの粒子に対しては

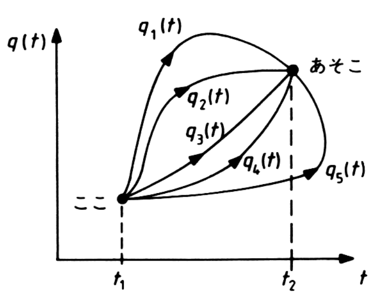


図 4.4 "ここ"($q_1(t)$)から"あそこ"($q_2(t)$)に至る可能な時空軌道

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x) \tag{4.38}$$

である．$V(x)$ がわかれば，“作用原理”を実際に適用することができる．しかし，どんな軌道が S を極小にするのか，どうやって見つけるのであろうか．何かある簡単な特定の例をとり，いくつか“仮想的な”軌道（すなわち Newton 流の方法で粒子がたどるのではないとわかっている軌道）について実際に S を計算し，S を極小にする実際の軌道（もちろん Newton の方程式からきまる軌道，問題 4.2 参照）がどんなものらしいかある感触を得ることは，極めて興味ある試みである．しかしこれは，S を極小にする $q(t)$ を見い出す一般的問題の実用的な解法ではないことは明らかである．実際，この問題は変分法によって解くことができる．

この問題は，ある関数 $f(t)$ が停留値を持つような点 t_0 を求めるなじみ深い問題に似たところがある．しかしこの場合，関数 S は t の簡単な関数ではなく，むしろ点 $q(t)$ の値の全集合の関数である．S は関数 $q(t)$ の関数，あるいは $q(t)$ の汎関数である．どのような特定の関数 $q_0(t)$ が S を極小にするか知りたいのである．

1 変数の場合との類推から，径路 $q_1(t)$ から径路 $q_2(t)$ へ小さな変分 $\delta q(t)$ を考えよう．変化 δq に対する変化 δS は，極小のときはゼロにならなくてはならない．作用の変化分は

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q(t)}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\delta\dot{q}(t)\right)\mathrm{d}t \tag{4.39}$$

で与えられる．$\delta\dot{q}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q(t))$ を用い，第 2 項を部分積分すると

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta q(t)\left[\frac{\partial L}{\partial q(t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\right]\mathrm{d}t+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\delta q(t)\right]_{t_1}^{t_2} \tag{4.40}$$

となる．t_1 から出発し t_2 に終わるすべての軌道の径路変分を考えているのだから，$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$ である．そこで S が停留値をとる条件は

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta q(t)\left[\frac{\partial L}{\partial q(t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\right]\mathrm{d}t=0 \tag{4.41}$$

である．これが任意の $\delta q(t)$ に対して真であるためには

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q(t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}=0} \tag{4.42}$$

でなくてはならない．これが有名な Euler-Lagrange の運動方程式である．この解は粒子が現実にたどる $q_0(t)$ を与える．

q を座標 x として，簡単な場合式(4.38)はどうなるか調べてみよう．Newton 流の方法での運動量と力を p，F とすればただちに

$$\partial L/\partial \dot{x}=m\dot{x}=p \tag{4.43}$$

$$\partial L/\partial x=-\partial V/\partial x=F \tag{4.44}$$

を得る．Euler-Lagrange の方程式

$$F=\mathrm{d}p/\mathrm{d}t \tag{4.45}$$

はまさに Newton の運動方程式と一致する．調和振動子（4．1 節で明らかにしたように，量子場の理論にとっても基本的である）の場合は

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{4.46}$$

である．これは N 個の独立な振動子（4．1 節参照）の場合は直ちに

$$L=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m\dot{Q}_r^2-\frac{1}{2}m\omega_r^2Q_r^2\right) \tag{4.47}$$

に拡張される．

さてここで量子力学への移行を考えよう．

4．2．2 Heisenberg-Lagrange-Hamilton 流の量子力学

量子力学の Heisenberg 定式化（付録 A 参照）を用いると，量子力学と古典力学の対応が格別直接的になると考えられる．Schrödinger 描像では，位置 x のような力学変数は時間によらず，時間の依存性は波動関数で表されている．したがって $q(t)$ のような量はないとみなされる．しかし，波動関数は時間によらず固定し力学変数が時間によって変化する Heisenberg 描像に，いつもユニタリー変換を施して Schrödinger 描像を得ることができる．Lagrange 流の量 $q(t)$ と平行に取り扱いたいため，Heisenberg 表示をとる．もちろん，量子力学と古典力学の間には基本的な違いがある．前者では力学変数は演算子であって一般に可換でない．特に基本的交換関係は（$\hbar=1$ とおく）

$$[\hat{q}(t),\ \hat{p}(t)]=\mathrm{i} \tag{4.48}$$

である．ここで記号 ∧ は量が演算子の性格を持つことを示す．$\hat{p}$ は式(4.43)の一般化

$$\hat{p}\equiv\partial\hat{L}/\partial\dot{\hat{q}} \tag{4.49}$$

で与えられる．量子力学の Heisenberg 流の定式化では，Schrödinger 型の運動方程式は存在しない．そのかわり，Heisenberg の運動方程式

$$\dot{\hat{A}}=-\mathrm{i}[\hat{A},\ \hat{H}] \tag{4.50}$$

が成り立つ．ここでハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ はラグランジアン演算子 $\hat{L}$ と関連して

$$\hat{H}=\hat{p}\,\dot{\hat{q}}-\hat{L} \tag{4.51}$$

で定義され，$\hat{A}$ は任意の力学的可測量（オブザーヴァブル）である．例えば，調和振動子の場合は

$$\hat{L}=\frac{1}{2}m\dot{\hat{q}}^2-\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \tag{4.52}$$

$$\hat{p}=m\dot{\hat{q}} \tag{4.53}$$

$$\hat{H}=(1/2m)\hat{p}^2+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \tag{4.54}$$

であって，$\hat{H}$ は全エネルギーである．式(4.49)を用いてラグランジアンから得られた $\hat{p}$ は，演算子 $\hat{A}$ を $\hat{p}$ とおいた Heisenberg の運動方程式と矛盾しないことに注目してほしい．$\hat{A}=\hat{p}$ のとき Heisenberg の運動方程式は

$$\dot{\hat{p}}=-m\omega^2\hat{q} \tag{4.55}$$

となり，これは調和振動子に対する Newton の法則の演算子版である．$\hat{p}$ に対する表式(4.53)より

$$\ddot{\hat{q}}=-\omega^2\hat{q} \tag{4.56}$$

が得られる．

さて，これは振動子の座標に対するなじみ深い古典的方程式のように見えるが (Lagrange 流の定式化を通じて再び導いてみるとよい)，実は演算子がどのように時間とともに展開していくかを記述する方程式であることに，十分注意しなくてはならない．量子力学的粒子が実際どこに見いだされるか，ということとはまったく別である．式(4.56)を波動関数ではさめば，粒子の平均位置が

古典的軌道から導かれることが直ちにわかる（Heisenberg の定式化では波動関数は時間によらない）．しかしこの軌道のまわりのゆらぎが必ず起こるはずであって，量子力学的粒子は射線のような古典軌道をそのままたどることはない．光子も古典軌道を通らないことを思い起こしてほしい．

4．2．3　量子力学的振動子

4．1節で示したように，量子力学的単振子のエネルギースペクトルと，それに関連した状態を知る必要がある．これは標準的な問題であるが，これを解くのに Dirac（1981，第6章）による“演算子”法という特別な解き方がある．この方法はこれからの議論の展開にとって決定的に重要だから，ここに紹介しておく．

振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H}=(1/2m)\hat{p}^2+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \tag{4.54}$$

である．$\hat{p}$，$\hat{q}$ が演算子でなければ，因子 $2m$ と ω を別にしてこれを“$(q-\mathrm{i}p)(q+\mathrm{i}p)$”と因数分解することを試みるであろう．$\hat{p}$，$\hat{q}$ が交換しない量子力学の場合でも，このような組み合せを用いることは極めて役に立つことが判明している．演算子 $\hat{a}$ を

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{q}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right) \tag{4.57}$$

で定義すると，そのエルミート共役

$$\hat{a}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{q}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right) \tag{4.58}$$

を用いてハミルトニアンは（問題4．4参照）

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger})\omega=\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\omega \tag{4.59}$$

と書ける．この第2式は第1式より，$\hat{a}$ と $\hat{a}^{\dagger}$ の間の交換関係

$$[\hat{a},\ \hat{a}^{\dagger}]=1 \tag{4.60}$$

を用いて導いたものである．この交換関係は $\hat{p}$ と $\hat{q}$ の間の交換関係から出る．この基本的交換関係式(4.60)と $\hat{H}$ の表式(4.59)より次の交換関係を示すことができる．

$$[\hat{H},\ \hat{a}]=-\omega\hat{a}$$
$$[\hat{H},\ \hat{a}^{\dagger}]=\omega\hat{a}^{\dagger} \tag{4.61}$$

エネルギー E_n を持つ $\hat{H}$ の固有状態 $|n\rangle$ を考える．

$$\hat{H}|n\rangle=E_n|n\rangle \tag{4.62}$$

この定義と交換関係式(4.61) を用いて状態 $\hat{a}^{\dagger}|n\rangle$ と $\hat{a}|n\rangle$ のエネルギーを

$$\hat{H}(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle)=(E_n+\omega)(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle) \tag{4.63}$$

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle)=(E_n-\omega)(\hat{a}|n\rangle) \tag{4.64}$$

のように求めることができる．したがって演算子 $\hat{a}^{\dagger}$ と $\hat{a}$ はそれぞれ状態 $|n\rangle$ のエネルギーを1単位 ω $(\hbar=1)$ だけ上げあるいは下げる．$\hat{p}$, $\hat{q}$ は エルミート的で $\hat{H}\sim\hat{p}^2+\hat{q}^2$ であるから，$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ はどのような状態 $|\psi\rangle$ に対しても正の定符号を取ることを証明できる．したがって演算子 $\hat{a}$ はエネルギーをいくらでも下げるわけにはいかない．最もエネルギーの低い状態 $|0\rangle$ が存在して，そこでは

$$\hat{a}|0\rangle=0 \tag{4.65}$$

が成り立たなくてはならない．これが系の最低エネルギー状態で，そのエネルギーは

$$\hat{H}|0\rangle=\frac{1}{2}\omega|0\rangle \tag{4.66}$$

である．これは量子力学的振動子の“ゼロ点エネルギー”である．第一励起状態は

$$|1\rangle=\hat{a}^{\dagger}|0\rangle$$

でエネルギーは $(1+1/2)\omega$ である．n 番目の状態はエネルギー $(n+1/2)\omega$ を持ち $(a^{\dagger})^n|0\rangle$ に比例する．規格化

$$\langle n|n\rangle=1$$

を得るためには，正しい規格化定数は

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{\dagger})^n|0\rangle \tag{4.67}$$

となることを証明できる(問題4．4参照)．$\hat{H}$ に対する固有値方程式に戻ると，

$$\hat{H}|n\rangle=\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\omega|n\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega|n\rangle \tag{4.68}$$

が導けるから，式(4.67) で定義された状態$|n\rangle$は（占拠）数演算子 $\hat{n}=\hat{a}^\dagger a$ の固有値 n に属する固有状態

$$\hat{n}|n\rangle=n|n\rangle \tag{4.69}$$

であることがわかる．

以上の議論をすべて，ラグランジアンが N 個の独立な振動子の和になっている系

$$\hat{L}=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m\dot{\hat{q}}_r^2-\frac{1}{2}m\omega_r^2\hat{q}_r^2\right) \tag{4.70}$$

に拡張するのは難しくない．基本的交換関係式(4.48) の一般化は

$$\begin{aligned}&[\hat{q}_r,\ \hat{p}_s]=\mathrm{i}\delta_{rs}\\&[\hat{q}_r,\ \hat{q}_s]=[\hat{p}_r,\ \hat{p}_s]=0\end{aligned} \tag{4.71}$$

となる．異なる指標 r または s で指定される振動子はすべて独立だからである．ハミルトニアンは（式(4.26)参照）

$$\hat{H}=\sum_{r=1}^{N}[(1/2m)\hat{p}_r^2+\frac{1}{2}m\omega_r^2\hat{q}_r^2] \tag{4.72}$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\left(\hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r+\frac{1}{2}\right)\omega_r \tag{4.73}$$

で，$\hat{a}_r$ と $\hat{a}_r^\dagger$ は式(4.57)，(4.58) の類推として定義される．それぞれの数演算子 $\hat{n}_r=\hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r$ の固有値は前の結果から n_r であるから，$\hat{H}$ の固有値は実際式(4.28) の形

$$E=\sum_{r=1}^{N}\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\omega_r \tag{4.28}$$

を持つ．対応する固有状態は，N 個のそれぞれの振動子の固有状態の積$|n_1\rangle|n_2\rangle\cdots|n_N\rangle$で与えられる．ここに$|n_r\rangle$は振動数 ω_r の励起量子 n_r 個を含む状態で，ふつうこの積状態を$|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_N\rangle$で表す．系の基底状態では，個々の振動子がどれも励起されておらず，状態は$|0,\ 0,\ \cdots\ 0\rangle$でこれを$|0\rangle$と略記する．ここで

$$\hat{a}_r|0\rangle=0,\ \text{すべての}\ r\ \text{に対して} \tag{4.74}$$

と了解する．演算子 $\hat{a}_r^\dagger$ は振動量子を１つ生成し，演算子 a_r は振動量子を１つ消滅させる．

4.2.4 Lagrange-Hamilton の場の古典力学

ここでは場に対して Lagrange-Hamilton の方法を用いることを考える．再び古典力学の場合をとり，まず1次元の問題に制限してはじめよう．

前の節で述べたように，N 自由度の場合から $N\to\infty$ の極限を予想している．

$$\{q_r(t)\ ;\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}\xrightarrow[N\to\infty]{}\phi(x,\ t) \tag{4.75}$$

ここに x は“糸”(具体的な系を思い浮かべたいのであれば図4.5を見よ）の変位を指定する連続変数である．それぞれの点 x において，独立な自由度 $\phi(x,\ t)$ があるので，場は“連続無限個”の自由度を持つ系である．ここではすべてをラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ を用いて定式化する．作用 S を

$$S=\int \mathrm{d}tL \tag{4.76}$$

で，ラグランジアン L(1次元）を

$$L=\int \mathrm{d}x\mathscr{L} \tag{4.77}$$

で定義する．方程式(4.75) は ϕ が［長さ］の次元を持つことを示唆し，離散的な場合は $L=T-V$ であったから，$\mathscr{L}$ は［エネルギー/長さ］の次元を持つ．(一般の場合は $\mathscr{L}$ は［エネルギー/体積］の次元を持つ．)

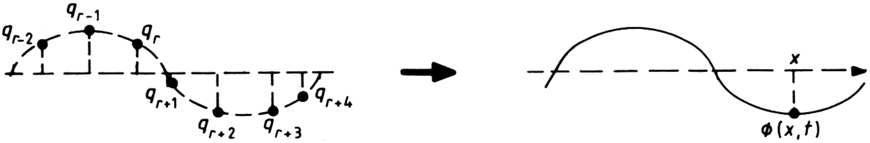


図4.5　多数の離散自由度（質点群）から連続自由度（場）への移行

ϕ は x の連続関数であるから，$\mathscr{L}$ は ϕ と $\dot{\phi}=\partial\phi/\partial t$ のみならず $\partial\phi/\partial x$ にもよる，という新しい特徴 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\ \partial\phi/\partial x,\ \dot{\phi})$ が生ずる．

前と同じく，同じ基本的な力学原理

$$\delta S=0 \tag{4.78}$$

を仮定する．これは場 ϕ の力学は S を極小にする条件から決まるという意味で

ある．今度は全変分は

$$\delta S=\int \mathrm{d}t\int\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi}\right]\mathrm{d}x \tag{4.79}$$

によって与えられる．$\delta\dot{\phi}$ に t の部分積分，$\delta(\partial\phi/\partial x)$ に x の部分積分を行い，生じた“表面項”を（変分の境界条件から）捨て去ると

$$\delta S=\int \mathrm{d}t\int \mathrm{d}x\delta\phi\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)\right] \tag{4.80}$$

がでて，$\delta S=0$ とおけば Euler-Lagrange の場の方程式

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)=0 \tag{4.81}$$

を得る．3 次元の場合への拡張は

$$\boxed{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)=0} \tag{4.82}$$

である．$\mathscr{L}$ の例として

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \tag{4.83}$$

を考える．因子 ρ（質量密度）と c（速度）は $\mathscr{L}$ の正しい次元を保つため導入した．これを Euler-Lagrange の方程式(4.81）に代入すると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \tag{4.84}$$

となり，まさに波動方程式が得られる．

最後の段階 — 場の系を量子力学に移行すること — では，離散的な場合と同じく，系のハミルトニアン（全エネルギー）に格別関心がある．古典場の場合は，実際にハミルトニアンを使うことはないが，ここではそれを導入し，次の節で量子論へ拡張しよう．Lagrange の力学では q と $\dot{q}$ で定式化され，Hamilton の力学では座標変数 q と運動量変数 p とで定式化されることを思い出そう．連続的な場合（場）では，ハミルトニアン H はハミルトニアン密度 $\mathscr{H}$ の積分（1 次元）

$$H=\int \mathrm{d}x\mathscr{H} \tag{4.85}$$

として書かれ，座標 $q_r(t)$ は“座標の場” $\phi(x,\ t)$ となる．それでは対応する“運

動量の場”は何であろうか．

答えは，Lagrangeの方法で導かれた一般化運動量（式(4.43)参照）

$$p=\partial L/\partial\dot{q} \tag{4.86}$$

の連続版で与えられる．“運動量の場”$\phi(x,\ t)$ — 専門語では“ϕに正準共役な運動量”と呼ばれる — を

$$\pi(x,\ t)=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\phi}(x,\ t) \tag{4.87}$$

で定義する．$\mathscr{L}$はラグランジアン密度である．πは運動量密度の次元を持つことに注目せよ．古典粒子力学ではハミルトニアンを

$$H(p,\ q)=p\dot{q}-L$$

で定義した．ここでもハミルトニアン密度を

$$\mathscr{H}(\phi,\ \pi)=\pi(x,\ t)\dot{\phi}(x,\ t)-\mathscr{L} \tag{4.88}$$

で定義する．$\mathscr{L}$が

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \tag{4.83}$$

で与えられる1次元の糸に応用して，どういう結果が生ずるか調べてみよう．まず

$$\pi(x,\ t)=\rho\partial\phi/\partial t \tag{4.89}$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\frac{1}{\rho}\pi^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho}\pi^2-\rho c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho}\pi^2+\rho c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{4.90}$$

となり

$$H=\int\left[\frac{1}{2\rho}\pi^2(x,\ t)+\frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\phi(x,\ t)}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{4.91}$$

が得られる．これはまさに予期した結果（式(4.34)参照）であり，上に述べた処方が正しいことを保証するものである．

4.2.5 Lagrange-Hamiltonの場の量子力学

さて古典場の定式化を量子化しなくてはならない．先験的には，どうして遂行したらよいかまったく不明である．実は，正準量子化というこの方法が量子

化の問題に確定した結果を与えるという事実が，まず最初に骨の折れる場のLagrange-Hamilton形式を発展させた真の理由である．われわれは，“座標のような”場 $\phi(x,\ t)$ と“運動量のような”場 $\pi(x,\ t)$ を導入した．場の理論の量子化へ移るには，離散的な場合に用いた手順をまねて，量 ϕ も π も演算子 $\hat{\phi}$，$\hat{\pi}$ へ格上げしてやることにする．いつものように，量子論の明らかな特徴は，理論の中に現れるある基本量の非可換性である．例えば離散的な場合には，基本的交換関係は

$$[\hat{q}_r(t),\ \hat{p}_s(t)]=\mathrm{i}\delta_{rs} \tag{4.92}$$

となる $(\hbar=1)$．したがって演算子 $\hat{p}$ と $\hat{\pi}$ は，交換関係式 (4.92) を連続量へ拡張したある交換関係を満たさなくてはならない．図 4.5 を思い起こせば，離散指標 r，s は連続変数 x，y になること，および交換関係式 (4.92) は同時刻のものであるから，交換関係は $[\hat{\phi}(x,\ t),\ \hat{\pi}(x,\ t)]$ の形をとるであろう．δ_{rs} の連続量への拡張は，Dirac の δ 関数である．病理的でないすべての関数 f に対して，δ 関数は次の性質を持つ（付録 A 参照）．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1 \tag{4.93}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)f(x)\mathrm{d}x=f(y) \tag{4.94}$$

したがって1次元の場合，場の量子論の基本交換関係は

$$[\hat{\phi}(x,\ t),\ \hat{\pi}(y,\ t)]=\mathrm{i}\delta(x-y) \tag{4.95}$$

となり，3次元の場合には右辺を $\delta^3(x-y)$ とおいて自明な拡張ができる．$\hbar=1$ とおいたことに注意すれば，両辺で次元が矛盾しないことを示すのは容易である．このような交換関係を満たす変数 $\hat{\phi}$，$\hat{\pi}$ は互いに“共役”であるという．

さてこの基本的交換関係の効果を，Euler-Lagrange の方程式として波動方程式を与えるようなラグランジアン

$$\hat{\mathscr{L}}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 \tag{4.83}$$

の場合に調べてみよう．c と ρ を1とおけば，これは電磁ポテンシャル A^μ の満たす波動方程式の簡略版（スピンがゼロで1次元）であると考えてよい．このとき

$$\hat{\pi}(x,\ t)=\dot{\hat{\phi}}(x,\ t) \tag{4.96}$$

が成り立ちハミルトニアン密度は

$$\hat{\mathscr{H}}=\hat{\pi}\dot{\hat{\phi}}-\hat{\mathscr{L}}=\frac{1}{2}\hat{\pi}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 \tag{4.97}$$

となる．全ハミルトニアンは

$$\hat{H}=\int\hat{\mathscr{H}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\left[\hat{\pi}^2+\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{4.98}$$

である．この形のままでは，$\hat{H}$ の固有値と固有状態をどうして求めてよいのか，自明ではない．まさにここに，正規モードについて調べてきた準備が役に立つのである．ハミルトニアンを独立な振動（すなわちモード）のある種の和として書くことができれば，そのあとどうすればよいかわかっている．しかし4．1節で考察したように，古典的な“糸”の場では，モードによる展開はFourier展開にほかならないことを学んでいる．いまの問題では，有限な領域 $(0,\ L)$ の間で定義された場を特に考えているわけではない（場合によっては“場を箱の中に閉じこめる”こともある）．実効的には $L\to\infty$ とすればよく，Fourier 級数はFourier 積分に，定常波は進行波におきかわる．波動方程式(4.29)を満たす古典場の平面波の解は

$$\phi(x,\ t)\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t} \tag{4.99}$$

で，$c=1$ だから

$$\omega=k \tag{4.100}$$

が成り立つ．この解で場を展開すれば

$$\phi(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}[a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}+a^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}\omega t}] \tag{4.101}$$

である．ただし ϕ は実数であると要請した．いささかめざわりな因子 $(2\pi\text{-}2\omega)^{-1}$ はまったく便宜的なもので，展開係数 a, a^* の規格化を決めるが，量子場 $\phi(x,\ t)$ の規格化が波動関数の規格化と矛盾しないように選ぶ．同じように，“運動量の場” $\pi=\dot{\phi}$ は

$$\pi(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}(-\mathrm{i}\omega)[a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}-a^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}\omega t}] \tag{4.102}$$

と展開される．これらの“モード展開”を，$\phi\to\hat{\phi}$, $\pi\to\hat{\pi}$ のように格上げし交換関数(4.95) を仮定して量子化する．したがって

$$\hat{\phi}(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}\omega t}] \tag{4.103}$$

および $\hat{\pi}$ に対する同様な式から，交換関係式(4.95)はモード演算子 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ に対する交換関係を次のように決める．（問題4．6参照）

$$\begin{aligned}[\hat{a}(k),\ \hat{a}^\dagger(k')]&=2\pi\cdot 2\omega\delta(k-k')\\ [\hat{a}(k),\ \hat{a}(k')]&=[\hat{a}^\dagger(k),\ \hat{a}^\dagger(k')]=0\end{aligned} \tag{4.104}$$

これらは離散的な振動子の交換関係

$$\begin{aligned}[\hat{a}_r,\ \hat{a}_s^\dagger]&=\delta_{rs}\\ [\hat{a}_r,\ \hat{a}_s]&=[\hat{a}_r^\dagger,\ \hat{a}_s^\dagger]=0\end{aligned} \tag{4.105}$$

を連続量へ類推したもので望ましい形をしている．δ 関数の前につく正確な因子は $\hat{\phi}$ の展開式(4.103) に課せられる規格化による．

$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ の交換関係式(4.104)の形は，すでに $\hat{a}(k)$ と $\hat{a}^\dagger(k)$ は連続的な問題に対する単一量子の消滅・生成演算子であることを示唆する．この解釈を確かめ $\hat{H}$ の固有値を求めるために，$\hat{\phi}$ と $\hat{\pi}$ の展開を $\hat{H}$ の中に代入すると，注目すべき結果

$$\hat{H}=\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}\left\{\frac{1}{2}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)+\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)]\omega\right\} \tag{4.106}$$

が得られる（問題4．7参照）．この結果と単一振動子についての結果

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger)\omega \tag{4.59}$$

を比較すると，4．1節で予想したように，“糸”の場のそれぞれの古典的モードを量子化することができ，各モードは固有の振動数 $\omega=k$ をもつ独立した振動子座標のようにふるまうことがわかる．演算子 $\hat{a}^\dagger(k)$ は k- モードの量子を1つ生成させ，$\hat{a}(k)$ は1つ消滅させる．$\hat{H}$ の中の因子 $(2\pi\cdot 2\omega)^{-1}$ は規格化条件から生じたものである．

エネルギー・スペクトルはどうなるか．基底状態は

$$\hat{a}_r|0\rangle=0,\ \text{すべての } r \text{ に対して} \tag{4.74}$$

の連続量への類推

$$\hat{a}(k)|0\rangle=0,\ \text{すべての } k \text{ に対して} \tag{4.107}$$

によってきまる，と予想される．しかしここに問題が1つ起こる．$\hat{H}$ は

$$\hat{H}=\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)\omega+\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}\cdot\frac{1}{2}[\hat{a}(k),\ \hat{a}^\dagger(k)]\omega \tag{4.108}$$

と書くことができるが，ここで $\hat{H}|0\rangle$ を考えよう，真空の定義式(4.107)より第

1項は予期したようにゼロとなるが，第2項は無限大となる．交換関係式(4.104)は $k \to k'$ のとき無限大の量 $\delta(0)$ を与え，さらに k- 積分は発散するからである．

明らかにこの項はゼロ点エネルギー $1/2\omega$ の連続量への拡張であるが，無限に多くの振動子があるため無限大になる．便宜的かつ慣習的な逃げ道は，適宜に定義された基底状態に相対的なエネルギー差のみが必要であるとして，式(4.108)の中の無限大の定数を放棄してしまうことである．そうすると基底状態は定義としてエネルギーゼロを持ち，$\hat{H}$ の固有値は

$$\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \cdot 2\omega} n(k) \omega \tag{4.109}$$

の形をとる．ここに $n(k)$ は（粒子数演算子 $\hat{a}^{\dagger}(k)\hat{a}(k)$ で数えられる）エネルギー $\omega = k$ の量子の数である．1つの決まった k，したがって ω に対して，スペクトルは単振子のスペクトルと同じである．

励起量子が存在する任意の状態は，基底状態 $|0\rangle$ に生成演算子 $\hat{a}^{\dagger}(k)$ を適宜適用して作ることができる．例えば，運動量 k_1 の量子を1つ，運動量 k_2 の量子を1つ含む二量子状態は

$$|k_1,\ k_2\rangle = \hat{a}^{\dagger}(k_1)\hat{a}^{\dagger}(k_2)|0\rangle \tag{4.110}$$

と書かれる．一般の状態は任意の数の量子を含む．

再び確認しておくと4.1節に略述した計画をこのたびはより形式的に完成したのである．基本的な表式(4.103)を例として，演算子 $\hat{a}(k)$，$\hat{a}^{\dagger}(k)$ をモード量子の消滅・生成演算子と解釈し，古典場 $\phi(x,\ t)$ の“量子化”を遂行した．少なくとも暗黙のうちに，まだ“力学的模型”のにおいが残っている．場 $\hat{\phi}(x,\ t)$ は Debye（の連続体）近似による（1次元）固体の量子化された振動を記述すると考えられる．量子はフォノンであり，$|0\rangle$ は固体の基底状態である．さてここで力学的な支柱を取り払い，簡素な場の量子論を包みこもう．何が波動を起こしているのかを問題にせずに，ただ単に(ϕ のような)場を仮定し，それを量子化する．電磁場のときの光子のように，励起の量子が粒子と呼ぶものである．式(4.103)の場の演算子 $\hat{\phi}$ をみると，量子を消す項は因子 $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ を伴い，量子を作る演算子は因子 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}$ を伴うことがわかる．この選択は自由にとるわけにはいかず，普通の時間に依存する摂動論の“吸収”および“放出”因子 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t}$

と両立するものである（付録A，（A.23），（A.24）参照）．

量子場 $\hat{\phi}$ の物理的解釈について多少の注釈を加えて，この長い節を終わる．まず第一に，この定式化は物質および輻射の波の側面も粒子の側面も，2つとも包みこんでいることを注意したい．波の性質は $\hat{\phi}$ の展開式(4.103)に用いた平面波展開から明らかである．これはもともとを尋ねれば ϕ，したがって $\hat{\phi}$ が波動方程式(4.29)に従う，という事実からきている．粒子の性質は，エネルギースペクトルの離散構造と，個々の量子（すなわち粒子）に結びつく演算子 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ から生じている．

次に，量子場では基底状態の意味は何であろうか．疑いもなくこの状態は，すべての k に対して $n(k)=0$ である状態であり，われわれの新解釈によれば，量子（したがって粒子）が1つも含まれない状態である．したがってこれは，真空である．のちに見るように，真空を場の系の基底状態と了解することは，現代の粒子物理にとって基本的な解釈である．例えば，クオークの閉じ込めや弱いベクトル・ボソンの質量獲得に欠くことのできない解釈である．$\hat{H}$ の中の全体的な無限大の定数を無視したけれども，例えばCasimir効果（Casimir, 1948, Kitchener and Prosser, 1957, Sparnaay, 1958）のように，ゼロ点エネルギーの差は検出しうる．量子場の真空についてのあれやこれやの側面はAitchison（1985）が論じている．

第三に，2粒子状態式(4.110)，$|k_1,\ k_2\rangle=\hat{a}^\dagger(k_1)\hat{a}^\dagger(k_2)|0\rangle$ を考えよう，交換関係式(4.104)の示すように演算子 $a^\dagger$ は交換するから，この状態は交換 $k_1\rightleftarrows k_2$ に対して対称である．これは今まで述べた定式化では不可避の特徴であって，1つのエネルギー量子を他のエネルギー量子から区別する方法はなく，2量子状態は量子を置く順序にはよらない．しかし，これは粒子解釈にある重要な含みを持たせる．状態は k_1, k_2 で指示される粒子の交換に対して対称であるから，同種のボソンを含む系を記述するのでなくてはならない．2つのフェルミオン型の量子を含む反対称状態を記述するには，どう定式化を修正すればよいかは，4．4節で論ずる．

最後に，場の量子論と普通の“波動関数”の量子力学とどう関連しているのか不思議に見えるかもしれない．この関連を洞察する能力は，後の章で重要になるが，実は簡単なことである．運動量 k' を持つ $\hat{\phi}$ 場の1量子を含む状態

$$|k'\rangle = \hat{a}^\dagger(k')|0\rangle$$

を作り，振幅 $\langle 0|\hat{\phi}(x,\ t)|k'\rangle$ を考えよう．これは

$$\langle 0|\hat{\phi}(x,\ t)|k'\rangle = \langle 0|\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}\omega t}]\hat{a}^\dagger(k')|0\rangle \quad (4.111)$$

と展開することができる．$\langle 0|\hat{a}^\dagger = (\hat{a}|0\rangle)^\dagger$ であるから $\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$ 項はゼロである．これ以外の項には交換関係式(4.104) を用いて

$$\langle 0|\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}[\hat{a}^\dagger(k')\hat{a}(k)+2\pi\cdot 2\omega\delta(k-k')]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x-\mathrm{i}\omega' t} \quad (4.112)$$

と書ける．再び真空の条件を用い，δ 関数の性質式(4.94)を使えば $k=k'$，$\omega=\omega'$ となるからである．真空は1に規格化 ($\langle 0|0\rangle=1$) されているとした．この結果は，1つの粒子が状態 $|k'\rangle$ にあるときの平面波の波動関数である．したがって，場の演算子の真空状態と1量子状態との間の行列要素が，まさに1粒子の量子力学の波動関数になっていることがわかる．この関係である慣用的な用語を説明することができる．ここで行った場の量子論への移行は，“第二量子化”と呼ばれる ― 普通の1粒子の量子力学を第一量子化の理論とするからである．

4.3　場の量子論における相互作用

いままで自由な，相互作用のない量子場を考察してきた．相互作用のない場である，という事実を示す証拠はいくつもある．場 $\hat{\phi}$ のモード展開式(4.103)は，関連する波動方程式の（自由な）平面波解を用いて書かれている．またハミルトニアン $\hat{H}$ は，それぞれのモード振動数（正規振動数）を持つ個々の振動子ハミルトニアンの和にちょうどなっている．最後に，$\hat{H}$ は粒子数演算子

$$\hat{n}(k) = \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) \quad (4.113)$$

の単純和であるからそれぞれの演算子は $\hat{H}$ と交換し，したがって運動の恒量である．励起の量子を1つ持つ2つの波は，互いに衝突する向きに運動していても滑らかに通りぬけ，なんら損傷を受けずに反対方向からでてくる．両者ともまったく相互作用をしない．

それではモード量子をどのようにして相互作用させられるのか．4.1節の古典力学の系の議論に戻ってみると，エネルギーが“振動子の和”になるための

決定的段階は，微小変位 q_r に対してポテンシャルエネルギーが2次式になる，という仮定であった．もしこの調和振動の近似を超えるのであれば，“モード同士が相互作用する”ことが期待できよう．同じことは連続体（の波または場）の場合にもあてはまる．しかるべき波動方程式を導くとき，どこかで $\tan\phi\sim\phi$ とか $\sin\phi\sim\phi$ とかおく近似を行ったはずである．この近似は方程式を線形化し，線形方程式の解の線形結合（重ね合わせ）はまた新しい解となる．例えば ϕ^3 のような ϕ の高次の項を残しておくと，そこから出てくる非線形方程式は，2つの独立な解を重ね合わせたのでは表せない解を持つ．したがって互いに衝突する向きに運動する2つの波は，何事も起こさず滑らかに通り抜けるのではなく，いろいろな形の相互作用やもとの波の歪曲が生ずるのである．

このような非調和系を量子化すると何が起こるのだろうか．新しい特徴の当たりをつけるため，ハミルトニアン

$$\hat{H}=(1/2m)\hat{p}^2+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2+\lambda\hat{q}^3 \tag{4.114}$$

を持つ“非調和”振動子を考えよう．$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の組み合わせを用いて書けば $\hat{H}$ は

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger)\omega+\frac{\lambda}{(2m\omega)^{3/2}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^3 \tag{4.115}$$

$$\equiv\hat{H}_0+\hat{H}' \tag{4.116}$$

となる．$\hat{H}_0$ は以前の自由な振動子のハミルトニアンである．$\hat{H}_0$ のスペクトルを見いだすため用いた代数的技法は，相互作用項 $\hat{H}'$ があるため新しい $\hat{H}$ には使えない．特に，$\hat{H}_0$ は粒子数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と交換するが，$\hat{H}'$ とは交換しない．つまり $\hat{H}$ の固有状態が何であるにせよ，一般に確定した数の“$\hat{H}_0$ 量子”を持たない．実際，この新しい固有値問題の正確な代数的解を見いだすことはできず，摂動論か数値的方法かに訴えなくてはならない．

この問題の摂動論的取り扱いでは，$\hat{H}'$ を摂動として $\hat{H}$ の真の固有状態を $\hat{H}_0$ の固有状態で展開する．

$$|\bar{r}\rangle=\sum_n c_{rn}|n\rangle \tag{4.117}$$

この展開の形から，真の固有状態 $|\bar{r}\rangle$ は“いろいろな数の $\hat{H}_0$ 量子”を含み，$|c_{rn}|^2$ は状態 $|\bar{r}\rangle$ が n 個の“$\hat{H}_0$ 量子”を含む確率であることがわかり，予期し

たとおりの姿になる．摂動論は，係数 c_m と正しいエネルギー固有値 $\bar{E}_r$ を摂動論の強さ λ の冪級数として展開する．すなわち展開

$$\bar{E}_r = E_r^{(0)} + \lambda E_r^{(1)} + \lambda^2 E_r^{(2)} + \cdots \tag{4.118}$$

$$\hat{H}_0 | r\rangle = E_r^{(0)} | r\rangle \tag{4.119}$$

から

$$E_r^{(1)} = \langle r | \hat{H}' | r\rangle \tag{4.120}$$

$$E_r^{(2)} = \sum_{s \neq r} \frac{\langle r | \hat{H}' | s\rangle \langle s | \hat{H}' | r\rangle}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}} \tag{4.121}$$

が得られる．エネルギーの2次の変化を計算するためには，

$$\langle s | (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger})^3 | r\rangle \tag{4.122}$$

の形の行列要素を考察する必要がある．$\hat{a}$，$\hat{a}^{\dagger}$ の順序を注意深く保ちながらこの行列要素を求めると，状態 $\langle s| = \langle r+3|$，$\langle r+1|$，$\langle r-1|$，$\langle r-3|$ の間でしか行列要素がゼロにならないことがわかる．

それでは2つの結合した非線形振動の量子力学はどうであろうか．同じように，一般の状態は無摂動振動子 $\hat{H}_{0(1)}$，$\hat{H}_{0(2)}$ の量子を任意個数含む状態

$$|\bar{r}\rangle = \sum_{n_1 \cdot n_2} c_{r, n_1 n_2} | n_1\rangle | n_2\rangle \tag{4.123}$$

であると仮定する．無摂動系の状態は，“1”および“2”型の量子を確定個数 n_1，n_2 だけ含む．相互作用する系の摂動計算では，このような $|n_1\rangle|n_2\rangle$ 状態を異なる量子個数を持つ状態 $|n_1'|n_2'\rangle$ へ結びつける行列要素がいるであろう．

以上の考察をすべてまとめると次の注意になる．量子化されたモードが相互作用するときの典型的特徴として，いろいろなモード量子の個数が運動の恒量でない状態を含む過程を考える必要がある．もちろん，これは高エネルギー粒子の間の衝突を考えるときまさしく起こる過程である．2つの粒子が遠く離れているとき，粒子は実際に自由であって，ある量子化された場のモード量子である．しかし粒子が相互作用をすると量子の数が変化すると考えざるをえず，衝突した時にもともと含まれていた個数とは違った個数の量子がしまいには自由粒子として現れてくる，とみなさなくてはならない．ここに用いた量子系の例では，これらの相互作用は $\hat{\phi}^3$ とか $\hat{\phi}^4$ のような項から生ずる．粒子の量子力学の場合の q^2 の類推から，自由な（“調和的な”）場合は $\hat{\phi}^2$ 項を含むからである．このような高次の項は，固体のフォノンの場合は，まさしく原子の変位の

非調和的な補正から生じ，自明でないフォノン・フォノン散乱を引き起こす．これが熱抵抗の量子論の基礎となる取り扱い法である．この定式化をフェルミオンやフォトン（光子）に一般化した場の量子論の場合は，非線形相互作用項は e^-e^- 散乱や $q\bar{q}$ 消滅などを引き起こす．ここで質量を持つ Klein-Gordon 場の量子論へ転じよう．

4．4　Klein-Gordon 場の量子論

前節では，量子力学と場の理論がどのように結び付けられるかを示した．Klein-Gordon 場に対しては，さらに相対論の要求も取り入れなくてはならない．Lagrange 流の取り扱いではこれは簡単である．古典論的な Euler-Lagrange の方程式

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\nabla\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)=0 \tag{4.82}$$

は，直ちに相対論的不変な形

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=0 \tag{4.124}$$

に書き換えられる．ただし $\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$ と略記する．同様に作用

$$S=\int\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\mathscr{L}=\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L} \tag{4.125}$$

も，$\mathscr{L}$ が相対論的に不変ならば体積要素d^4x もそうだから，相対論的に不変である．したがって相対論的に共変な場の量子論を作るには，不変な密度 $\mathscr{L}$ と共変な Euler-Lagrange 方程式を作らなくてはならない．以前の糸のラグランジアン

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \tag{4.83}$$

で $\rho=c=1$ とおいて一般化すると

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)\cdot(\partial^\mu\phi) \tag{4.126}$$

となり，波動方程式は

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi=0 \tag{4.127}$$

となる．場が量子化されても，これらの式は成立する．

この不変ラグランジアンは質量をもたない粒子を記述する．それではどんなラグランジアンが Klein-Gordon 方程式を与えるのであろうか．答は上の式の簡単な一般化

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{4.128}$$

となる．場の方程式（K·G 方程式）の平面波解は

$$\omega^2=\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{m}^2 \tag{4.129}$$

できまる振動数を持ち，これは質量を持つ粒子の正しいエネルギー・運動量関係式である．

この場の理論をどう量子化したらよいであろうか．場 ϕ の Fourier 展開の 4 次元的類推は

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\hat{a}^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{4.130}$$

であり，“共役運動量” $\hat{\pi}=\dot{\hat{\phi}}$ の同様な展開は

$$\hat{\pi}(\boldsymbol{x},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}(-\mathrm{i}\omega)[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}-\hat{a}^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{4.131}$$

である．規格化定数 $1/2\omega$ の因子には格別の動機が認められる．体積要素 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}/2\omega$ は相対論的に不変（付録式(E. 26) 参照）だからである．ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{KG}}=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\frac{1}{2}[\hat{\pi}^2+\nabla\hat{\phi}\cdot\nabla\hat{\phi}+m^2\hat{\phi}^2] \tag{4.132}$$

となり，$\hat{\phi}$，$\hat{\pi}$ の展開および交換関係

$$\begin{aligned}&[\hat{a}(k),\ \hat{a}^\dagger(k')]=(2\pi)^3\cdot 2\omega\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\&\text{その他は可換}\end{aligned} \tag{4.133}$$

を用いて $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ で表すことができる．結果は予期したように

$$\hat{H}_{\mathrm{KG}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)+\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)]\omega \tag{4.134}$$

となり，再び交換関係を用いて生じた無限大のゼロ点エネルギーを無視すれば

$$\hat{H}_{\mathrm{KG}}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)\omega \tag{4.135}$$

となる．今度は粒子のエネルギー・運動量関係式が相対論的になるということを別にすれば，モード演算子 $\hat{a}^\dagger$，$\hat{a}$ は前と同じく場 $\hat{\phi}$ の量子の生成・消滅演算

子である，という物理的解釈を支持する．

$\hat{\phi}$ は実数 ($\hat{\phi}=\hat{\phi}^{\dagger}$) であり，スピンの自由度を持たないからこれは実スカラー場と呼ばれる．$\hat{a}^{\dagger}(k)$ で生成され $\hat{a}(k)$ で消滅するただ一種の場の量子が存在する．したがって $\hat{\phi}$ は，例えば π^0 のように，質量を与えれば単一粒子状態が唯一に決まるような粒子と物理的に対応する．しかし，質量を指定したとき，物理的に“粒子”および“反粒子”の状態と解釈できる 2 つの状態が存在する場合が，しばしばある．例えば (π^+, π^-), (K^0, $\overline{K^0}$) 粒子などである．このような状況を記述するためには，明らかに同じ質量を持つ 2 つの実スカラー場が必要である．2 つの異なった種類のモード演算子がいるからである．例えば同じ質量 m のこのような自由な場 $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ の場のラグランジアン

$$\hat{\mathscr{L}}=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\hat{\phi}_1\partial^{\mu}\hat{\phi}_1-\frac{1}{2}m^2\hat{\phi}_1^2+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\hat{\phi}_2\partial^{\mu}\hat{\phi}_2-\frac{1}{2}m^2\hat{\phi}_2^2 \tag{4.136}$$

を考えよう．これが“粒子・反粒子”の状況を表すのに向いていることを以下に示そう．

一般に“粒子”と“反粒子”は，1 つあるいはそれ以上の加算的な量子数が反対符号の数値を持つことで区別される．これらの量子数は保存されるから，量子数に対応する演算子はハミルトニアンと交換し，時間に関して定数である (Heisenberg 表示，方程式 (4.50) 参照)．これらの演算子は対称演算子と呼ばれ，後の章に進むほど重要になる．ここでは，“粒子”と“反粒子”がただ 1 つの対称演算子に対して反対符号の固有値を持つことで区別されるもっとも簡単な場合を考えよう．この状況はすでにラグランジアン (4.136) で実現されている．式 (4.136) のラグランジアンで $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ を次の $\hat{\phi}_1'$, $\hat{\phi}_2'$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1'&=(\cos\alpha)\hat{\phi}_1-(\sin\alpha)\hat{\phi}_2\\ \hat{\phi}_2'&=(\sin\alpha)\hat{\phi}_1+(\cos\alpha)\hat{\phi}_2\end{aligned} \tag{4.137}$$

で置き換えても変わらない（不変）という対称性である．これは普通の空間で z 軸の回りに座標の回転を行うことに類似しているが，もちろんこれは場の自由度を混合することで単なる空間座標の混合ではない．対称変換式 (4.137) は時に“O(2) 変換”，すなわち 2 次元の回転群と呼ばれる．$\hat{\mathscr{L}}$ の不変性

$$\hat{\mathscr{L}}(\hat{\phi}_1',\ \hat{\phi}_2')=\hat{\mathscr{L}}(\hat{\phi}_1,\ \hat{\phi}_2) \tag{4.138}$$

は容易に確めることができる（問題 4．8 参照）．

さてこの対称性に結びつく保存則は何であろうか．無限小回転 ε

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1' &= \hat{\phi}_1 - \varepsilon\hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_2' &= \varepsilon\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2\end{aligned} \tag{4.139}$$

を考えれば簡単でもあり十分でもあるから，微小変化 $\delta\hat{\phi}_i$ を

$$\begin{aligned}\delta\hat{\phi}_1 &\equiv \hat{\phi}_1' - \hat{\phi}_1 = -\varepsilon\hat{\phi}_2 \\ \delta\hat{\phi}_2 &\equiv \hat{\phi}_2' - \hat{\phi}_2 = \varepsilon\hat{\phi}_1\end{aligned} \tag{4.140}$$

で定義することができる．この変換のもとで $\hat{\mathscr{L}}$ は不変，すなわち $\delta\hat{\mathscr{L}}=0$ である．$\hat{\mathscr{L}}$ は $\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$，$\partial_\mu\hat{\phi}_1$ および $\partial_\mu\hat{\phi}_2$ のあからさまな関数であるから

$$\begin{aligned}0=\delta\hat{\mathscr{L}} &= \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_1)+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_2) \\ &\quad +\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{\phi}_1}\delta\hat{\phi}_1+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{\phi}_2}\delta\hat{\phi}_2\end{aligned} \tag{4.141}$$

と書くことができる．これは Euler-Lagrange の方程式を導き出す演算と多少似ているが，変化 $\delta\hat{\phi}_i\,(i=1, 2)$ は時空間の軌道とは何の関係もない．この変化は 2 つの場を混合するのである．$\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$ に対する運動方程式を用いて $\delta\hat{\mathscr{L}}$ を

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_1)+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_2) \\ &\quad +\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)}\right)\right]\delta\hat{\phi}_1+\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)}\right)\right]\delta\hat{\phi}_2\end{aligned} \tag{4.142}$$

と書くことができる．$\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_i)=\partial_\mu(\delta\hat{\phi}_i)$ であるから，これは全発散

$$0=\partial_\mu\left[\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)}\delta\hat{\phi}_1+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)}\delta\hat{\phi}_2\right] \tag{4.143}$$

である．これらの型式的段階はまったく一般的であって，2 つの場 $\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$ に依存するあるラグランジアンが変換 $\hat{\phi}_i\to\hat{\phi}_i+\delta\hat{\phi}_i$ のもとで不変になる場合，いつでも成り立つ．今の場合，変換式(4.140) で与えられる $\delta\hat{\phi}_i$ に対して

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu\left[-\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)}\varepsilon\hat{\phi}_2+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)}\varepsilon\hat{\phi}_1\right] \\ &= \varepsilon\partial_\mu[(\partial^\mu\hat{\phi}_2)\hat{\phi}_1-(\partial^\mu\hat{\phi}_1)\hat{\phi}_2]\end{aligned} \tag{4.144}$$

である．ここで自由場のラグランジアンを第二の段階で用いた．ε は任意であるから，4 元ベクトル演算子

$$\hat{N}^\mu=\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_1 \tag{4.145}$$

は保存され，

$$\partial_\mu \hat{N}^\mu = 0 \tag{4.146}$$

が成り立つ．このような4元ベクトル演算子は対称性のカレント（対称性の流れ）と呼ばれ，時に $\hat{J}^\mu$ と記される．古典場の場合 Noether (1918) による一般的な定理があって，ラグランジアンがある連続変換のもとで不変であれば，それに関連した対称性のカレントが存在する．Noether の定理は 8.2 節で再び論ずる．

さてこれら対称性のカレントは対称性の演算子とどう結びつくのだろうか．発散式(4.146) をちゃんと書けば

$$\partial \hat{N}^0/\partial t + \nabla\cdot\hat{\boldsymbol{N}} = 0 \tag{4.147}$$

となる．この方程式を全空間に積分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V\to\infty}\hat{N}^0\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} + \int_{S\to\infty}\hat{\boldsymbol{N}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.148}$$

となる．ここで第2項には発散の定理を用いた．一般に場は無限遠で十分速く減少するから表面積分はゼロとなり，量 $\hat{N}$

$$\hat{N} = \int \hat{N}^0\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{4.149}$$

は時間によらないことが導かれる．すなわち，対称性のカレントの $\mu=0$ 成分は対称性の演算子である．

今考えている簡単な例について，$\hat{N}$ がどう“粒子”を“反粒子”から区別しているか調べるために，$\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$ をある単一の複素場の成分

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\phi}_1 - \mathrm{i}\hat{\phi}_2)\\ \hat{\phi}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\phi}_1 + \mathrm{i}\hat{\phi}_2)\end{aligned} \tag{4.150}$$

とみなすと便利であることがわかっている．$\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$ に対する平面波展開式(4.103) は，$\hat{\phi}$ が展開

$$\hat{\phi} = \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + \hat{b}^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{4.151}$$

で書けることを意味する．ただし

$$\begin{aligned}\hat{a}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 - \mathrm{i}\hat{a}_2)\\ \hat{b}^\dagger(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger - \mathrm{i}\hat{a}_2^\dagger)\end{aligned} \tag{4.152}$$

と定義する．演算子 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$，$\hat{b}$，$\hat{b}^\dagger$ は交換関係

$$
\begin{aligned}
&[\hat{a}(k),\ \hat{a}^\dagger(k')]=(2\pi)^3 2\omega\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\
&[\hat{b}(k),\ \hat{b}^\dagger(k')]=(2\pi)^3 2\omega\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\
&\text{その他の交換関係はゼロ}
\end{aligned}
\tag{4.153}
$$

を満たす．これは $\hat{a}_i$ 演算子に対する交換関係

$$[\hat{a}_i(k),\ \hat{a}_j^\dagger(k')]=\delta_{ij}(2\pi)^3 2\omega\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\ \text{など} \tag{4.154}$$

から出てくる．複素場の展開式(4.151)においては，2種類の区別ができる演算子 $\hat{a}$ と $\hat{b}$ が現れることに注意せよ．

$\hat{\phi}$ を用いるとラグランジアン(4.136) は

$$\hat{\mathscr{L}}=\partial_\mu\hat{\phi}^\dagger\partial^\mu\hat{\phi}-m^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi} \tag{4.155}$$

となり，ハミルトニアンはゼロ点エネルギーを省略して

$$\hat{H}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)+\hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k)]\omega \tag{4.156}$$

となる．O(2) 変換式(4.137) は簡単な位相の変化

$$\hat{\phi}'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{\phi} \tag{4.157}$$

となり (2．6節の注記(iii)参照)，U(1)回転と呼ばれる．対称性のカレント

$$\hat{N}^\mu=\mathrm{i}(\hat{\phi}^\dagger\partial^\mu\hat{\phi}-\hat{\phi}\partial^\mu\hat{\phi}^\dagger) \tag{4.158}$$

と対称性の演算子 $\hat{N}$ は

$$\hat{N}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)-\hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k)] \tag{4.159}$$

となる (問題4．9参照)．

ハミルトニアンは“a”量子と“b”量子の個数の和を含むが，$\hat{N}$ は差を含むことに気がつく．別の言い方をすれば，$\hat{N}$ は“a”型の粒子は $+1$ と数えるが“b”型の粒子は -1 と数える．これは“b”は“a”の反粒子であるという解釈を強く支持する．$\hat{N}$ は保存される対称性の演算子で，その固有値は粒子・反粒子を区別する役に立つ．一般の状態に対して $\hat{N}$ の固有値は“a”の数から“反 a”の数を引いたもので，運動の恒量である．全エネルギーも同じく運動の恒量で“a”のエネルギーと“反 a”のエネルギーの和に等しい．

ここでは粒子 — 反粒子を区別する一番簡単な場合，加算的な保存量がただ1つ存在する場合を論じた．もう少し複雑な例は (K^+, K^-) の対であって，スト

レンジネスと電荷が反対符号の値を持つ．もちろん，簡単なラグランジアン(4.155)には電磁相互作用が含まれていないから電荷は定義できない(以下でその修正を行う)．複素場は(ストレンジネスに関して)(K_0, $\overline{K_0}$)の対を記述するのに適している．

対称性の演算子 $\hat{N}$ はいくつか重要な性質を持っている．まず第一に，上で $\mathrm{d}\hat{N}/\mathrm{d}t=0$ を一般論（Noether の定理）から証明したが，また

$$[\hat{N},\ \hat{H}]=0 \tag{4.160}$$

を確かめておかなくてはならない．これは対称性から期待されるばかりでなく，無矛盾性を保証する．これは実際成立する（問題 4.9(a) 参照)．また

$$\begin{aligned}[\hat{N},\ \hat{\phi}]&=-\hat{\phi}\\ [\hat{N},\ \hat{\phi}^\dagger]&=\hat{\phi}^\dagger\end{aligned} \tag{4.161}$$

を示すことができ，指数関数の展開（問題 4.9(b)）を用いて

$$\hat{U}(\alpha)\hat{\phi}\hat{U}^{-1}(\alpha)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{\phi}=\hat{\phi}' \tag{4.162}$$

となる．ここに

$$\hat{U}(\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{N}} \tag{4.163}$$

である．これはユニタリー演算子 $\hat{U}(\alpha)$ は有限のU(1)回転の効果を持つことを示す．

$\hat{N}$ の固有値が N である固有状態 $|N\rangle$ を考えよう．状態 $\hat{\phi}|N\rangle$ に対して $\hat{N}$ の固有値は何であろうか．交換関係式(4.161) により

$$\hat{N}\hat{\phi}|N\rangle=(N-1)\hat{\phi}|N\rangle \tag{4.164}$$

が成り立つから，$\hat{\phi}$ は $\hat{N}$ の固有値を1だけ減らす．これは $\hat{\phi}$ 場は展開式(4.151) の第1項（$\hat{a}$ 項）を通じて“a”粒子を1つ消すという解釈と矛盾しない．“$\hat{\phi}$ は粒子を消す”という取り方が定義式(4.150) で $\hat{\phi}=(\hat{\phi}_1-\mathrm{i}\hat{\phi}_2)/\sqrt{2}$ と選んだ理由である．これが交換関係式(4.161)の中のマイナス符号となり，ひいては上の固有値 $N-1$ を生ずる．演算子 $\hat{\phi}$ は $\hat{N}$ の固有値を1だけ減らすことは，同じ場 $\hat{\phi}$ が展開式(4.151) の中の第2項（$\hat{b}^+$ 項）を通じて反粒子を作るという解釈と矛盾しない．同様に $\hat{\phi}^+|N\rangle$ を考えれば，演算子 $\hat{\phi}^+$ は $\hat{a}^+$ 項を通じて粒子を作ることにより，また $\hat{b}$ 項を通じて反粒子を消すことにより，N の値を1だけ増やすことを容易に証明できる．真空状態（粒子も反粒子も存在しない状態）は

$$\hat{a}(k)|0\rangle = \hat{b}(k)|0\rangle = 0 \quad \text{すべての } k \text{ に対して}$$

によって定義される．

4.5　フェルミオン場とスピン・統計の関係

Dirac 方程式に対する Lagrange の方法も考察しておかなくてはならない．量子化前のラグランジアンは

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = \mathrm{i}\psi^{\dagger}\dot{\psi} + \mathrm{i}\psi^{\dagger}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - m\psi^{\dagger}\beta\psi \tag{4.165}$$

である(問題 4.10 参照)．これは γ 行列の記法を用いると相対論的不変性が一層明らかになる．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = \overline{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \tag{4.166}$$

複素スカラー場と同じように，ψ，$\overline{\psi}$ を量子化して平面波の解でモード展開を行ってみよう．その結果は

$$\overline{\psi} = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=1,2} [\hat{c}_s(k) u(k,\ s) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + \hat{d}_s^{\dagger}(k) v(k,\ s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{4.167}$$

である．u，v の定義については問題 3.5 を見よ．ここで $\hat{c}_s^{\dagger}(k)$ をスピン s，運動量 k の Dirac 粒子の生成演算子と解釈したい．多分真空を

$$\hat{c}_s(k)|0\rangle,\ \text{すべての } k \text{ と } s=1,\ 2 \text{ に対して} \tag{4.168}$$

で，2 フェルミオン状態を

$$|k_1,\ s_1\,;\,k_2,\ s_2\rangle = \hat{c}_{s_1}^{\dagger}(k_1)\,\hat{c}_{s_2}^{\dagger}(k_2)|0\rangle \tag{4.169}$$

で定義すべきであろう．ボソンとの違いがなくてはならないのは，まさにこの点である．2 つの同種の粒子を含む状態は，指標 $k_1 \leftrightarrow k_2$，$s_1 \leftrightarrow s_2$ の交換に対して反対称であり，もし量子数(指標)の 2 つの組が同一であれば Pauli の原理により禁止されてしまう，と要請しなくてはならない．

このジレンマ (二律排反) を解決する方法は，簡単ではあるが根本的である．フェルミオンに対しては，交換関係を反交換関係で置き換えるのである．2 つの演算子 $\hat{A}$，$\hat{B}$ の反交換子を

$$\{\hat{A},\ \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \tag{4.170}$$

と書く．2 つの異なる $\hat{c}^{\dagger}$ が反可換であれば

$$\hat{c}_{s_1}^{\dagger}(k_1)\,\hat{c}_{s_2}^{\dagger}(k_2) + \hat{c}_{s_2}^{\dagger}(k_2)\,\hat{c}_{s_1}^{\dagger}(k_1) = 0 \tag{4.171}$$

が成り立つから，望んでいた反対称性

$$|k_1,\ s_1;k_2,\ s_2\rangle = -|k_2,\ s_2;k_1,\ s_1\rangle \tag{4.172}$$

が得られる．一般に

$$\{\hat{c}_{s_1}(k_1),\ \hat{c}^{\dagger}_{s_2}(k_2)\} = (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\delta_{s_1 s_2}$$
$$\{\hat{c}_{s_1}(k_1),\ \hat{c}_{s_2}(k_2)\} = \{\hat{c}^{\dagger}_{s_1}(k_1),\ \hat{c}^{\dagger}_{s_2}(k_2)\} = 0 \tag{4.173}$$

と仮定し，$\hat{d}$ および $\hat{d}^{\dagger}$ に対しても同じ反交換関係を仮定する．δ 関数の前の因子は，Dirac の波動関数を規格化する規約による．なぜ“ボソンは交換しフェルミオンは反交換をする”のか，不思議に思われるかもしれない．洞察を深めるために，Dirac 場に対して再び対称性と粒子・反粒子の考察を行ってみよう．

Dirac 場 $\hat{\psi}$ は複素場である．これは展開式(4.167) の中に 2 つの区別のつくモード演算子が使われていることでわかる．スカラー場の場合のように，質量のパラメーターは 1 つしかないが，量子は粒子と反粒子を区別して解釈できるものと期待する．両者を区別する対称性の演算子を複素スカラー場の場合との類推で求める．式(4.166) の量子化された形 $\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{D}}$ はU(1) 変換

$$\hat{\psi} \to \hat{\psi}' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{\psi} \tag{4.174}$$

のもとで不変である．これは無限小の形では

$$\hat{\psi} \to \hat{\psi}' = \hat{\psi} - \mathrm{i}\varepsilon\hat{\psi} \tag{4.175}$$

となる．これに対応する（Noether の）対称性のカレントは

$$\hat{N}^{\mu} = \bar{\hat{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi} \tag{4.176}$$

と計算され，関連する対称性の演算子は

$$\hat{N} = \int \hat{\psi}^{\dagger}\hat{\psi}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{4.177}$$

である．フェルミオンの場合も，$\hat{N}$ はある種の粒子数演算子である．平面波展開式(4.167) を代入して少し計算をすると

$$\hat{N} = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\sum_{s=1,2}[\hat{c}^{\dagger}_s(k)\hat{c}_s(k) + \hat{d}_s(k)\hat{d}^{\dagger}_s(k)] \tag{4.178}$$

をうる．同じように，Dirac のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\sum_{s=1,2}[\hat{c}^{\dagger}_s(k)\hat{c}_s(k) - \hat{d}_s(k)\hat{d}^{\dagger}_s(k)]\omega \tag{4.179}$$

の形を持つことがわかる．$\hat{N}$ および $\hat{H}$ をこの形に還元するとき，いままでモード演算子 $\hat{c}$，$\hat{c}^{\dagger}$，$\hat{d}$，$\hat{d}^{\dagger}$ には交換関係も反交換関係も仮定せず，単に Dirac のスピノールの性質だけを用いてきた．さてはじめから交換関係を仮定してみる

としよう．式(4.178)，(4.179)の終わりの項は $\hat{d}_s^\dagger(k)\hat{d}_s(k)$ と書かれ，いつものようにゼロ点エネルギーを無視すると，$\hat{H}$ は“c”および“d”粒子に対する2つの粒子数演算子の差を含むことがわかる．したがって，常識的な理論ならば正値確定であるべき量がそうなっていない．さらに，複素スカラー場の時と同じように，“d”は $\hat{N}$ の値に反対符号をとる“c”の反粒子であるべしと想定しているが，$\hat{N}$ は“c”および“d”演算子の和に比例（この仮定のもとに）し，どの粒子も +1 と数えている．これも粒子・反粒子の解釈に合わない．一方，もし反交換関係を仮定すると，これら諸困難がすべて解決する．いつもの無限大の付加項を無視して

$$\hat{N}=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\sum_{s=1,2}[\hat{c}_s^\dagger(k)\hat{c}_s(k)-\hat{d}_s^\dagger(k)\hat{d}_s(k)] \tag{4.180}$$

$$\hat{H}=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\sum_{s=1,2}[\hat{c}_s^\dagger(k)\hat{c}_s(k)+\hat{d}_s^\dagger(k)\hat{d}_s(k)\omega \tag{4.181}$$

が得られ，これは満足のゆく表式で“d”量子を“c”量子の反粒子と解釈することができる．もし複素スカラー場の場合に，ボソンの演算子に反交換関係を仮定したとすれば，同じような難点が生じたはずである．量子場の理論が，スピンと統計との関係を強制するのは，まさにこの点にある．

4．6　QED 予告編

これまで考察してきたのは，相互作用をしない Klein-Gordon 場と Dirac 場の場合だけである．第 2 章の議論から，電磁相互作用を理論の中に取り込む強力な方法がわかっている．量子力学の“ゲージ原理”により，大局的（時空座標によらない）U(1) 位相不変性を局所的（時空座標による）U(1) 不変性に格上げすれば，その際の補償場が電磁場と同定される．場の量子論でもまったく同じ原理が存在し，電磁相互作用の形を決める．実際場の量子論による定式化では，U(1) 不変性に関連した対称性のカレント，対称性の演算子をあからさまに求めて，それがまさに電流と電荷になっていることを証明できる．

複素スカラー場，Dirac 場の双方について，自由なラグランジアンは U(1) 変換（式(4.157) および式(4.174)）に対して不変であることを見てきた．これは大局的な対称性であると考えられる．第 2 章で学んだやり方で，この大局的不

変性も局所的不変性に格上げしてみよう．Dirac のラグランジアン

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}}=\bar{\hat{\psi}}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\hat{\psi} \tag{4.166}$$

は局所的 U(1) 位相変換

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},\ t)\to\hat{\psi}'(\boldsymbol{x},\ t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\hat{\chi}(\boldsymbol{x},t)}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},\ t) \tag{4.182}$$

のもとで不変であるが，このとき置き換え

$$\partial^{\mu}\to\hat{D}^{\mu}=\partial^{\mu}+\mathrm{i}e\hat{A}^{\mu} \tag{4.183}$$

を行い，また（量子化された）4 元ベクトルポテンシャルが

$$\hat{A}^{\mu}\to\hat{A}'^{\mu}=\hat{A}^{\mu}+\partial^{\mu}\hat{\chi} \tag{4.184}$$

の変換を行う，としている．このときラグランジアンは相互作用項を獲得

$$\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{D}}\to\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{D}}+\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}} \tag{4.185}$$

し，それは

$$\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}=-e\bar{\hat{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi}\hat{A}_{\mu} \tag{4.186}$$

と表される．$\hat{\mathscr{L}}=\hat{T}-\hat{V}$ であるから，この $\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}$ を演算子のポテンシャル

$$\hat{V}_{\mathrm{D}}=e\hat{\psi}^{\dagger}\hat{\psi}\hat{A}_{0}-e\hat{\psi}^{\dagger}\boldsymbol{\alpha}\hat{\psi}\cdot\hat{\boldsymbol{A}} \tag{4.187}$$

と解釈することができ，式(3.83) の場の量子論における類推が得られる．電荷密度演算子を $e\hat{\psi}^{\dagger}\hat{\psi}$ (電荷と密度演算子の積)，電流密度演算子を $e\hat{\psi}^{\dagger}\boldsymbol{\alpha}\hat{\psi}$ と同定すれば，式(4.187) は期待される形 "$\rho A_{o}-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}$" を持っている．4 元電磁カレント演算子 $\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}$ は

$$\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}=e\bar{\hat{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi} \tag{4.188}$$

と同定される．さて $\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}$ は前節の対称性のカレント $\hat{N}^{\mu}$ に e をかけたもの（式(4.176) 参照）である．$\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}$ の保存は大局的 U(1) 不変性（変換式(4.182) の χ が定数)だけから出る．しかし，相互作用を含むラグランジアンでこの大局的 U(1) 不変性に従うものはいくつもある．局所的 U(1) 不変の要請は，相互作用（式(4.186) の $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$）の形をただ 1 つに決めてしまう．実際，これは $-\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}\cdot\hat{A}_{\mu}$ である．したがってこの型の理論では，電磁カレント $\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}$ は単に対称性のカレントであるのみならず，ベクトルポテンシャル $\hat{A}^{\mu}$ が物質場 $\hat{\psi}$ と結合する正確な形まで決めてしまうのである．

QED のラグランジアンを完全にするには，Maxwell の場 $\hat{A}^{\mu}$ を持ち込む部分が必要である．この項を，$\hat{A}^{\mu}$ に対する Euler-Lagrange の方程式が Maxwell の形（式(2.19)参照）

$$\Box\hat{A}^{\mu}-\partial^{\mu}(\partial_{\nu}\hat{A}^{\nu})=\hat{j}^{\mu}_{\text{em}} \tag{4.189}$$

を持たねばならない，という要請から決めよう．$\hat{A}^{\mu}$ の方程式は

$$\partial_{\nu}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_{\nu}\hat{A}_{\mu})}\right)-\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{A}_{\mu}}=0 \tag{4.190}$$

の形をとり，式(4.186) より

$$-\partial\hat{\mathscr{L}}_{\text{int}}/\partial\hat{A}_{\mu}=\hat{j}^{\mu}_{\text{em}} \tag{4.191}$$

が成り立つことは明らかだから，式(4.190) の第 1 項が式(4.189) の左辺（の符号を変えたもの）になるような $\hat{A}^{\mu}$ の“運動エネルギー”項が必要である．その答は

$$\hat{\mathscr{L}}_{\text{em}}=-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} \tag{4.192}$$

である（問題 4．11 参照）．ここに

$$\hat{F}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\hat{A}_{\nu}-\partial_{\nu}\hat{A}_{\mu} \tag{4.193}$$

は第 2 章に導入した場の強さのテンソルを量子化(演算子化)したもので，ゲージ変換式(4.184) に対して明らかに不変である．

同じようにして，複素スカラー場に対する大局的 U(1) 不変性(4.157) も，電磁場を組み込んで局所的不変性に一般化することができる．

$$\hat{\mathscr{L}}_{\text{KG}}\rightarrow\hat{\mathscr{L}}_{\text{KG}}+\hat{\mathscr{L}}_{\text{int}} \tag{4.194}$$

と置き

$$\hat{\mathscr{L}}_{\text{KG}}=\partial_{\mu}\hat{\phi}^{\dagger}\partial^{\mu}\hat{\phi}-m^{2}\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi} \tag{4.155}$$

に対して $\partial_{\mu}\rightarrow\hat{D}_{\mu}$ と拡張すれば

$$\hat{\mathscr{L}}_{\text{int}}=-\mathrm{i}e(\hat{\phi}^{\dagger}\partial^{\mu}\hat{\phi}-(\partial^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger})\hat{\phi})\hat{A}_{\mu}+e^{2}\hat{A}^{\mu}A_{\mu}\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi} \tag{4.195}$$

をうる．これは式(3.80) の場の理論的類推である．

電磁カレントは前と同じく

$$\hat{j}^{\mu}_{\text{em}}=-\partial\hat{\mathscr{L}}_{\text{int}}/\partial\hat{A}_{\mu} \tag{4.191}$$

であるが，式(4.195) より

$$\hat{j}^{\mu}_{\text{em}}=\mathrm{i}e(\hat{\phi}^{\dagger}\partial^{\mu}\hat{\phi}-(\partial^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger})\hat{\phi})-2e^{2}\hat{A}^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi} \tag{4.196}$$

が得られる．ボソンの場合，電磁カレントは，大局的位相不変性に基づく（粒子数の）流れに e をかけたものでは<u>ない</u>ことに注意する．その原因は，ボソンの流れは微係数を含み，ゲージ共変なボソンの流れは $\hat{A}^{\mu}$ それ自身を含む項を

生じなくてはならない事実に由来する．これは式(4.196)の中で明らかであり，波動関数の場合もそうである(式(2.29)参照)．しかし，保存される電磁荷量(電荷)（式(4.196)の $\mu=0$ 成分の空間積分）は，$A^0=0$ というゲージ（これは可能なゲージの取り方である)のもとでは，e とボソン数の演算子との積である．スカラー QED の全ラグランジアンは，前と同じく $\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{em}}$ を付け加えれば完成する．

付加された相互作用のラグランジアン $\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}$ から，4.2.5 節の規則にしたがって相互作用のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ を作ることができる．フェルミオンの場合それは

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}=\int \hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}\hat{A}_{\mu}\mathrm{d}^3x \tag{4.197}$$

であり，電磁カレント $\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}$ は

$$\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}=e\bar{\hat{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi} \tag{4.188}$$

で与えられる．この相互作用の形は量子場の粒子像の見地から非常に簡単に解釈することができる．相互作用は3つの場 $\hat{\psi}$，$\bar{\hat{\psi}}$，$\hat{A}^{\mu}$ をすべて同じ点で含み，4. 3 節に論じた "ϕ^3" 型の相互作用の一般化である．ボソンの場合は "ϕ^4" 型の相互作用 $e^2\hat{A}^{\mu}\hat{A}_{\mu}\cdot\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi}$ も含む．明確な例として，簡単なフェルミオンの場合を考えよう．場 $\hat{\psi}$ は電子を消すか陽電子を作るが，場 $\bar{\hat{\psi}}$ は電子を作るか陽電子を消し，相互作用項は電荷とフェルミオン数を保存するよう保証されている．電磁場 $\hat{A}^{\mu}$ は光子を生成または消滅させる．したがってこのただ1つの相互作

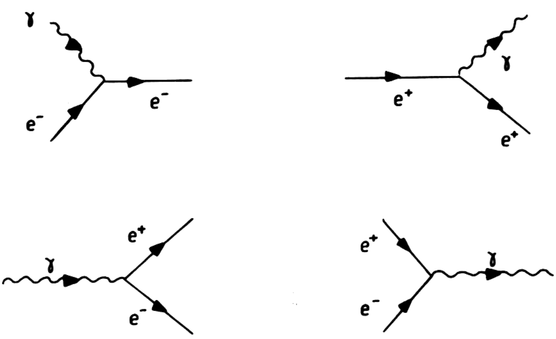


図 4.6 相互作用密度 $e\bar{\hat{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi}\cdot\hat{A}_{\mu}$ に関連する可能な基本"頂点"．これらはエネルギー・運動量の制約によって（現実の）物理的過程としては起こり得ない

用項は，図 4.6 にその一部を示すようなたくさんの過程をまとめて表している．もう少し正確に言えば，演算子 $\widehat{H}_{\rm int}$ は図 4.6 のような状態の間に，ゼロでない行列要素を持つ．たとえば

$$\langle {\rm e}^- | \widehat{H}_{\rm int} | \gamma {\rm e}^- \rangle \neq 0 \tag{4.198}$$

である．これらの図形では，“時間”は左から右へ紙面を横切って流れる（初め ⟶ 終わりの状態）と約束し，上下に流れるのではない．これはこれからずっと守る約束である．式(4.198)のような振幅は，のちの章でずっと詳しく取り扱うが，もちろん相互作用についてすべて 1 次である．実際，対応する物理的過程は初めの状態と終わりの状態の間でエネルギーと運動量が保存しなければ起こらない（第 1 章の問題 1.1 (a)，1.1 (b) を参照）．しかし量子力学の 2 次の摂動論では，記号的に

$$\sum_n \langle {\rm f} | \widehat{H}_{\rm int} | n \rangle \frac{1}{E_{\rm i} - E_n} \langle n | \widehat{H}_{\rm int} | {\rm i} \rangle \tag{4.199}$$

と書ける形の寄与をすべて尽くさなくてはならない．ここに $E_{\rm i} = E_{\rm f}$ であるが

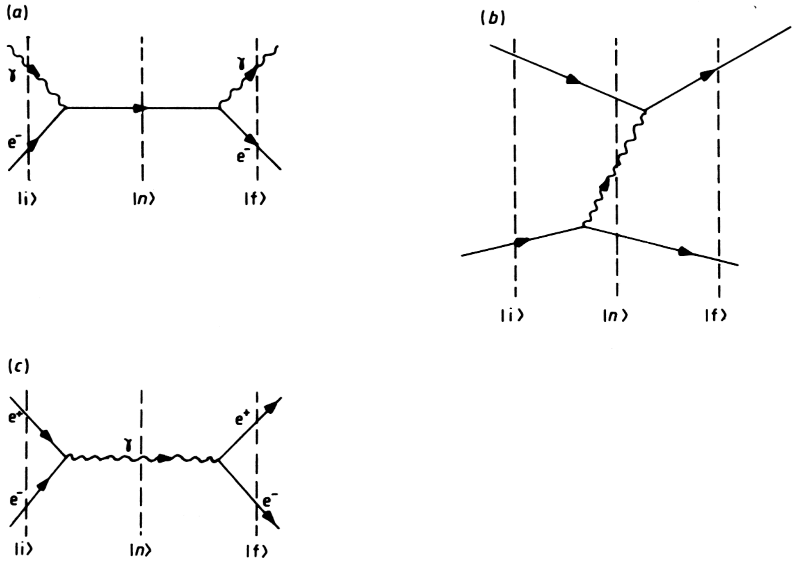


図 4.7　2 次の摂動論で許される可能な過程　(*a*)　電子の Compton 散乱　(*b*)　1 光子交換による電子・電子散乱　(*c*)　1 光子中間状態を経過する電子・陽電子消滅

$E_n \neq E_\mathrm{i}$, $E_n \neq E_\mathrm{f}$ である (付録式(A.84) を参照). したがって図 4.7 に示すような 2 次の振幅は図 4.6 に示す過程を“はめ込む”ことが許される. 図 4.7 (a) は電子の Compton 散乱, 図 4.7 (b) は $\mathrm{e^-e^-}$ 散乱における光子の交換, 図 4.7 (c) は 1 光子中間状態を経る $\mathrm{e^+e^-}$ 消滅過程である.

これら物理的直観に訴える図と, それに相当する振幅の数学的表式とを対応させる正確な方法は, 第 5 章と第 6 章に述べる予定である. 形式的な“場の理論”的取り扱いを避けてきた理由がそろそろわかりはじめたと思う. これら相互作用の基本的構造は実は極めて簡単である. というのは例えばたくさんの光子が同時に発生するような複雑な可能性を (基本相互作用として) 考えることもできたかもしれないが. 図 4.6 に示すような基本的な粒子項点の数学的表式は, $\hat{H}_\mathrm{int}$ の適当な行列要素をとれば得られるのである.

まとめ

(1) 離散系.
  (i) 古典力学的連成振動子
  (ii) 量子力学的連成振動子
(2) 連続系.
  (i) 場の古典力学
  (ii) 場の量子力学
(3) 電磁場の基本励起量子としての光子.
(4) ラグランジアンと作用原理.
(5) 量子力学的調和振動子.
(6) 古典力学および量子力学における場の Lagrange-Hamilton 流の定式化.
(7) 場の励起量子としての粒子と, 基底状態としての真空.
(8) 波動関数を使う量子力学との関係.
(9) 場の量子論における相互作用.
(10) Klein-Gordon 場に対する場の量子論.
(11) 対称性と Noether の定理.
(12) 粒子と反粒子.

(13)　フェルミオン場とスピン・統計の関係．

(14)　QED 予告編と Feynman 図形．

問題

4. 1　方程式(4.35) を証明せよ．

4. 2　一様な重力のもとでの1次元の運動を考え，式(4.38) の中で $V(x)=-mgx$ とする．次の3つの軌道について式(4.37) の作用 S を $t_1=0$ から $t_2=t_0$ まで計算せよ．

(a)　$x(t)=at$　(4.2.1)

(b)　$x(t)=\frac{1}{2}gt^2$　(Newton の結果)　(4.2.2)

(c)　$x(t)=bt^3$　(4.2.3)

ここで定数 a，b はすべての軌道が同じ点 $x(t_0)$ で終わるように選ばれているとする．

4. 3　(a)　式(4.48)，(4.54) を用いて関係

$$\hat{p}=m\dot{\hat{q}} \tag{4.3.1}$$

が（$\hat{A}=\hat{q}$ とおいた）Heisenberg の運動方程式と矛盾しないことを示せ．

(b)　同様な方法で

$$\dot{\hat{p}}=-m\omega^2\hat{q} \tag{4.3.2}$$

であることを示せ．

4. 4　(a)　ハミルトニアン $\hat{H}$ の表式(4.54) を演算子 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ を用いて書き直せ．

(b)　$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ の間の交換子(交換関係)を計算し，その結果と(a)で導いた $\hat{H}$ の表式を用いて，方程式(4.61) を証明せよ．

(c)　方程式(4.67) に与えられている $|n>$ は，規格化条件

$$\langle n|n\rangle=1 \tag{4.4.1}$$

を満たすことを証明せよ．

(d)　交換関係(4.60) を用いて式(4.69) を直接に証明せよ．

4. 5　ψ，ψ^* を独立な古典場と考えて，ラグランジアン密度

$$\mathscr{L}=\mathrm{i}\psi^*\dot{\psi}-(1/2m)\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi \tag{4.5.1}$$

は ψ， ψ^* に対する Schrödinger 方程式を与えることを示せ.

4. 6 $\hat{a}(k)$ および $\hat{a}^\dagger(k')$ の間の交換関係(4.104) は, $\hat{\phi}$ と $\hat{\pi}$ の間の基本的交換関係(4.95) と矛盾しないことを示せ.

4. 7 演算子 $\hat{\phi}$，$\hat{\pi}$ の平面波展開を $\hat{H}$ の表式(4.98)に代入して, 方程式(4.106)を証明せよ.

ヒント ω は常に正と定義されているから式(4.100) は $\omega=|k|$ と厳密に書けることに注意せよ.

4. 8 式(4.136)のラグランジアン $\mathscr{L}$ は, 場の変換(4.137) $(\hat{\phi}_1,\ \hat{\phi}_2) \longrightarrow (\hat{\phi}'_1,\ \hat{\phi}'_2)$ に対して不変, すなわち $\mathscr{L}(\hat{\phi}_1,\ \hat{\phi}_2)=\mathscr{L}(\hat{\phi}'_1,\ \hat{\phi}'_2)$ であることを示せ.

4. 9 (a) 式(4.158) で与えられている $\hat{N}^\mu$ に対し, 対応する式(4.149) の $\hat{N}$ は式(4.159) になることを示せ. 式(4.156) で与えられる $\hat{H}$ に対し

$$[\hat{N},\ \hat{H}]=0 \tag{4.9.1}$$

であることを示せ.

(b) 方程式(4.162) を証明せよ.

4. 10 ラグランジアン(4.165) を用いる作用原理に基づき, $\psi^\dagger$ を変化させて Dirac 方程式を導け.

4. 11

$$\hat{\mathscr{L}}=-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}-\hat{j}^{\,\mu}_{\mathrm{em}}\hat{A}_\mu \tag{4.11.1}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\hat{A}_\nu-\partial_\nu\hat{A}_\mu \tag{4.11.2}$$

であれば $\hat{A}_\mu$ に対する Euler-Lagrange の方程式は Maxwell の形

$$\Box\hat{A}^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu\hat{A}^\nu)=\hat{j}^{\,\mu}_{\mathrm{em}} \tag{4.11.3}$$

をとることを示せ.

ヒント：$F_{\mu\nu}$ の反対称性を用いて “$F\cdot F$” 項を $-\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu$ と書き直すと便利である.

第２部　量子電磁力学(QED)
—われわれの知る最良の理論

第 5 章　スピン 0 の粒子の電磁相互作用：力と粒子の交換過程

5．1　1 次の摂動論

5．1．1　行列要素 (1)

電荷 e を持つスピン 0 の粒子（例えば π^+）が（古典的）ポテンシャル A^μ で表される電磁場の中で散乱される過程を考えよう．KG 方程式に代入するポテンシャルはすでに 3．6 節で与えていて

$$\hat{V}_{\mathrm{KG}}=\mathrm{i}e(\partial_\mu A^\mu+A^\mu\partial_\mu)-e^2A^2 \tag{5.1}$$

である．これから議論を進めていくうちにだんだんと詳しく論ずることになるが，このポテンシャルに基づく摂動論のそれぞれの次数を特徴づけるパラメーターは $e^2/4\pi$ である．自然単位系（付録 B および C 参照）でその値は

$$\alpha=e^2/4\pi\approx\frac{1}{137} \tag{5.2}$$

である．e は電気素量，α は微細構造定数と呼ばれる．α の値が小さいことが QED で摂動論が大成功をおさめた理由である．

α の 1 次の程度では e^2A^2 項を無視することができ，摂動のポテンシャルは

$$\hat{V}=\mathrm{i}e(\partial_\mu A^\mu+A^\mu\partial_\mu) \tag{5.3}$$

となる．散乱過程については，NRQM の時間に依存する摂動論（付録 A 参照）と同じ遷移振幅の式

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)}=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\phi_{\mathrm{f}}^*\hat{V}\phi_{\mathrm{i}} \tag{5.4}$$

を仮定する†．ここで ϕ_{i}，ϕ_{f} は初めと終わりの自由粒子の解である．式(3.11)よりこれらは

$$\phi_{\mathrm{i}}=N_{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{i}}\cdot x} \tag{5.5}$$

†（原注）　証明は Bjorken-Drell（1964）の第 9 章を参照せよ．

$$\phi_f = N_f e^{-ip_f \cdot x} \tag{5.6}$$

である．規格化定数はあとで決める．$\hat{V}$ の表式を代入し，部分積分を行うと(問題 5.1 参照)

$$\mathscr{A}_{fi}^{(1)} = -i\int d^4x\{ie[\phi_f^*(\partial_\mu\phi_i)-(\partial_\mu\phi_f^*)\phi_i]\}A^\mu \tag{5.7}$$

を得る．これは式(3.20) の確率の流れの式を思い出させる．実際，これを

$$\mathscr{A}_{fi}^{(1)} = -i\int d^4x j_{fi}^\mu(x)A_\mu(x) \tag{5.8}$$

と書けば，流れは

$$j_{fi}^\mu(x) = ie(\phi_f^*\partial^\mu\phi_i-(\partial^\mu\phi_f^*)\phi_i) \tag{5.9}$$

である．これは単一状態に対する普通の確率の流れとの類推から，電磁的な“遷移電流”とみなすことができる．次の節では，場の量子論を用いてこの考えの正確な意味を探ろう．ϕ_i，ϕ_f に自由粒子の平面波を代入すれば

$$\mathscr{A}_{fi}^{(1)} = -iN_iN_f\int d^4x e(p_i+p_f)_\mu e^{-i(p_i-p_f)\cdot x}A^\mu(x) \tag{5.10}$$

となる．

A^μ として何をとるべきであろうか．もっとも簡単な場合は，A^μ が自由場，すなわち源の電流 j^μ を 0 とおいた Maxwell 方程式の解になっているときである．A^μ が結果としてどういう形をとるかは重要な問題なので，節を新たにして論じよう．

5. 1. 2　自由な電磁場に対する A^μ の形

j^μ を 0 とおくと，A^μ は方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \tag{5.11}$$

を満たす．2. 3 節でみたように，これらの方程式はゲージ変換

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi \tag{5.12}$$

を施しても不変である．この自由度を用いて，条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{5.13}$$

が満たされるように A^μ を選ぶことができる．これは Lorentz 条件と呼ばれる．A^μ が（最終的に）1つに決まるように特別な条件を A^μ に課す手順を“ゲージを選ぶ”という．実は，条件(5.13) はまだ A^μ を一意に決定しないことはす

ぐあとでわかる．Lorentz 条件は，Maxwell 方程式(5.11)の中のいろいろな A^μ の成分を共変的に分離独立させ，さらに非常に簡単な方程式

$$\Box A^\mu = 0 \tag{5.14}$$

にする．この方程式は

$$A^\mu = N\varepsilon^\mu e^{-ik\cdot x} \tag{5.15}$$

の形の平面波の解を持ち，$k^2=0$（すなわち $k_0{}^2=\boldsymbol{k}^2$）である．N は規格化の因子，ε^μ は波の偏りのベクトルである．ゲージ条件(5.13) はここで ε^μ に対する条件になり

$$k\cdot\varepsilon = 0 \tag{5.16}$$

が成り立つ．しかし，まだゲージのすべての自由度を尽くしたわけではない．まだポテンシャルに対して変換

$$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \tilde{\chi} \tag{5.17}$$

を行う余地がある．ただし $\tilde{\chi}$ は質量を持たない KG 方程式

$$\Box\tilde{\chi} = 0 \tag{5.18}$$

を満たすとする．$\tilde{\chi}$ に対するこの条件は，さらに同じような変換を行っても，その結果のポテンシャルは依然 $\partial_\mu A^\mu=0$ を満たすことを保証する．平面波の解に対しては，この残ったゲージ自由度は ε^μ を k^μ の定数倍だけ変えることにあたる．

$$\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \beta k^\mu \equiv \varepsilon'^\mu \tag{5.19}$$

これら自由場の解に対しては $k^2=0$ だから，やはり $\varepsilon'\cdot k=0$ である．

この自由度は重要な結果を生む．条件

$$k^\mu = (k^0,\ \boldsymbol{k}), \qquad k_0^2 = \boldsymbol{k}^2 \tag{5.20}$$

のもとに偏りのベクトル

$$\varepsilon^\mu = (\varepsilon^0,\ \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{5.21}$$

が Lorentz 条件

$$k\cdot\varepsilon = 0 \tag{5.16}$$

を満たす解を考えよう．ゲージ不変性は，k^μ の定数倍を ε^μ に加えても正しい偏りのベクトルであることを意味する．

そこで ε^μ の時間成分を細工して Lorentz 条件が3元ベクトルの条件

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{5.22}$$

になるようにできることは明らかである．この条件は，伝播の方向 $\boldsymbol{k}$ に共に垂直な2つの独立な偏りのベクトルしかないことを意味する．z 方向に伝播する波 ($k^\mu=(k^0,\ 0,\ 0,\ k^0)$) に対しては

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}=(1,\ 0,\ 0) \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}=(0,\ 1,\ 0) \tag{5.24}$$

のようにとることができる．このようなとり方は，ポテンシャルに付随する場 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ が直線偏極していることに対応する．もちろん式(2.9)，(2.10) より容易に計算できるように，

$$A^\mu_{(i)}=N(0,\ \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)})\mathrm{e}^{-ik\cdot x},\quad i=1,\ 2 \tag{5.25}$$

が成り立つ．よく用いられる別のとり方は

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda=+1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ i,\ 0) \tag{5.26}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda=-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -i,\ 0) \tag{5.27}$$

であって，式(5.23)，(5.24) の線型結合になっており，円偏極の輻射に対応する．式(5.26)，(5.27) の位相のとり方は，運動の方向（ここでは z 軸）に沿ったスピンの射影（ヘリシティー）が $\lambda=\pm1$ に確定した状態に対する量子力学の標準的なとり方である．容易に関係式

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'} \tag{5.28 a}$$

を確めることができ，これは対応する4元ベクトル $\varepsilon^\mu=(0,\ \boldsymbol{\varepsilon})$ で書けば

$$\varepsilon^*(\lambda)\cdot\varepsilon(\lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'} \tag{5.28 b}$$

である．したがって古典電磁気学で周知の結果，自由な電磁場は純粋に横波であることが結論された．この定式化では，ベクトル・ポテンシャルはみかけ上4つの独立な成分 (V，$\boldsymbol{A}$) を持つが，Lorentz 条件式(5.13) が独立成分の数を1つ減じ，式(5.17) ～(5.19) で利用したその他のゲージ自由度によって，さらに1つ減るのである．

さて以上の議論はすべて（量子化されていない）古典場 A^μ を用いて行った．A^μ を量子化し，量子場 $\hat{A}^\mu$ に対してはどうなるであろうか．前章の議論，特に4. 2節の終わりに述べた議論に従えば，式(5.15) の A^μ は，4元運動量 k と4元偏極 ε^μ を持つ光子の波動関数を表すとするのがもっともらしいと考えられ

る．これは光子が質量を持たないことを意味する $k^2=0$ という拘束条件と確かに矛盾しない．2つの独立な ε^μ ベクトルは，2つの独立な偏り，あるいはヘリシティーを持つ光子の波動関数と解釈される．したがって光子の独立な偏り状態は2つだけである．極めて重要な点は，独立な状態の数が2つだけになってしまうのは，自由な光子が質量を持たない（式(5.19)のすぐあとの注意を参照）という事実にまでさかのぼるということである．質量を持つ光子の“類推”（例えば Z^0 粒子）は3つの独立な偏りの状態を持つことが期待される．これは12.2節でふれる．

5．2節では量子場の取り扱いを論ずる．しばらくの間，行列要素(5.10)の計算を続行し，A^μ を光子概念で解釈してみよう．

5．1．3　行列要素(2)

運動量 k，偏り状態 λ を持つ入射光子に対して，式(5.10)の中の適切な波動関数として

$$A^\mu = N_k \varepsilon^\mu(\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \tag{5.29}$$

を取る．射出光子に対しては

$$A^\mu = N_k \varepsilon^{\mu *}(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \tag{5.30}$$

をとる．式(5.29) を式(5.10) に代入すると

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)} &= -\mathrm{i}eN_\mathrm{i}N_\mathrm{f}N_k(p_\mathrm{i}+p_\mathrm{f})\cdot\varepsilon\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_\mathrm{i}-p_\mathrm{f})\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \\ &= -\mathrm{i}eN_\mathrm{i}N_\mathrm{f}N_k(p_\mathrm{i}+p_\mathrm{f})\cdot\varepsilon(2\pi)^4\delta^4(p_\mathrm{f}-p_\mathrm{i}-k)\end{aligned} \tag{5.31}$$

を得る．4元運動量を保存する δ 関数のエネルギー部分（時間成分）は，$E_\mathrm{f}=E_\mathrm{i}+k^0$ でなければならないことを示し，エネルギー k^0 の光子が吸収されたことを表す．付録A.1で論ずるように，これは式(5.29)の中の時間変化が $\sim e^{-\mathrm{i}k^0 t}$ であることに対応する．したがって振幅(5.31)は，4元運動量 k の光子が，スピンを持たない電荷 e，4元運動量 p_i の粒子に吸収され，粒子が運動量 p_f の終わりの状態に移行する過程を記述する．図で表せば図5.1のようになる．

エネルギー・運動量 δ 関数から課せられる束縛条件はこの場合

$$E_\mathrm{f} = E_\mathrm{i} + k^0 \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} = \boldsymbol{p}_\mathrm{i} + \boldsymbol{k} \tag{5.33}$$

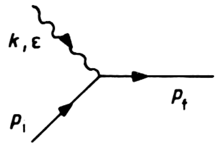


図 5.1　1 光子吸収

である．すべて自由な粒子であるから

$$(k^0)^2-\boldsymbol{k}^2=0,\qquad E_f^2-\boldsymbol{p}_f^2=E_i^2-\boldsymbol{p}_i^2=m^2 \tag{5.34}$$

が成り立つ．条件式(5.32)，(5.33)は条件式(5.34)と両立することはできない．したがって図 5.1 の過程は現実の遷移としては起こり得ない．これは 4．6 節の終わりに注意したとおりである．しかし，もし終わりの粒子が始めの粒子の励起状態であれば(例えば原子や原子核の状態の励起のような場合)，このような過程は起こり得る．この場合エネルギー・運動量条件を満たすことができるからである．これに対応して，図 5.2 で表される放出過程も，初めの励起状態がエネルギーを失う（自発放出）のであれば可能である．自発放出の理論は，Dirac が量子場の概念の基礎を敷いた論文 (Dirac，1927) の中で初めて取り扱った．

上の議論では量子化した電磁場（“光子”）の言葉を自由に用いてしまったが，この結果が第 4 章の場の理論の定式化から出てくることを次に示そう．

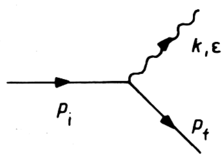


図 5.2　1 光子放出

5．2　1次の場の量子論

付録 A の式(A.82) に，式(5.4) の場の理論的類推は

$$\mathscr{A}_{fi}^{(1)}=-i\int d^4x\langle f|\hat{\mathscr{H}}_{int}(\boldsymbol{x},\ t)|i\rangle \tag{5.35}$$

で与えられることが示してある．ここで$|\mathrm{i}\rangle$, $|\mathrm{f}\rangle$は自由場の固有状態で，上添字Iは“相互作用表示”を意味する（付録A．3参照）．これは$\hat{\mathscr{H}}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ t)$の中の場の演算子が式(4.151)のような形の普通の自由場で展開できることを意味する．それでは今の場合$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ t)$は何であろうか．ふつうは相互作用のハミルトニアン密度は，対応する相互作用のラグランジアン密度にマイナス符号をつけたものにほかならない．そのわけは次のとおりである．簡単にするためただ1つのスカラー場$\hat{\phi}$を考えると，$\hat{\mathscr{H}}$は$\hat{\mathscr{L}}$と$\hat{\mathscr{H}}=\hat{\pi}\dot{\hat{\phi}}-\hat{\mathscr{L}}=\hat{\pi}\dot{\hat{\phi}}-\hat{\mathscr{L}}_0-\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}$の関係にある．$\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}$が時間微分を含まないとき，$\hat{\pi}=\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial\dot{\hat{\phi}}$は相互作用を入れても変わらない．したがって$\hat{\mathscr{H}}=\hat{\mathscr{H}}_0+\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}$と書けば，$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}=-\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}$である．このような事情は，例えばスピン1/2の粒子の電磁相互作用のとき起こる．式(4.186)の$\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}$は微係数を含まないから，式(4.197)の$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}$は実際に式(4.186)の符号を変じたものである．しかし，スピン0の荷電粒子に対しては，式(4.195)の$\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}$は微係数を含み，$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}=-\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{int}}+e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}$となる．共変形でない付加項は問題を起こすように見えるが，実は，“相互作用表示”の精密な定義を含む注意深い取り扱いを行い，場の演算子の微係数を時間順序に並べた積(Nishijima, 1969, 5．5節)を用いると，このような非共変的な付加項は物理的な行列要素ではすべて打ち消すことが示される．

したがって式(5.35)の中の$\hat{\mathscr{H}}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}$に対しては式(4.195)の符号を変じたものを用いる．式(5.1)から式(5.3)に至った段階を踏み，1次の摂動ではe^2の項を無視して

$$\hat{\mathscr{H}}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}=\mathrm{i}e(\hat{\phi}^\dagger\partial^\mu\hat{\phi}-(\partial^\mu\hat{\phi}^\dagger)\hat{\phi})\hat{A}_\mu \tag{5.36}$$

を用いることにする．式(5.36)は演算子として

$$\hat{j}^\mu_{\mathrm{em}}=\mathrm{i}e(\hat{\phi}^\dagger\partial^\mu\hat{\phi}-(\partial^\mu\hat{\phi}^\dagger)\hat{\phi}) \tag{5.37}$$

と書け，式(5.9)の適切な拡張になっている．

場$\hat{\phi}$および$\hat{A}^\mu$の展開は式(4.151)を参照して

$$\hat{\phi}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E}[\hat{a}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\hat{b}^\dagger(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}] \tag{5.38}$$

$$\hat{A}^\mu(x)=\sum_\lambda\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3 2\omega'}[\varepsilon^\mu(k',\ \lambda)\hat{\alpha}(k',\ \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}$$

$$+\varepsilon^{*\mu}(k',\ \lambda)\hat{\alpha}^\dagger(k',\ \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x}] \tag{5.39}$$

である．両者を比べて，実は式(5.29)，(5.30) が平面波の一種の類推として式(5.38)の中に現れていることがわかる．$\hat{a}(k', \lambda)$ は，括弧の中の運動量と偏りを持つ光子を消滅させる演算子，$\hat{a}^\dagger(k', \lambda)$ は同じく対応する光子を生成する演算子と解釈する．

式(5.38)，(5.39)を代入した $\hat{j}^\mu_{\text{em}}\hat{A}_\mu$ の形と，4．6 節で論じた予備的な議論から，相互作用は図 5.1，図 5.2 で表されるような放出・吸収の過程を生ずることは明らかである．記号の中に示した運動量と偏りを持つパイオンと光子を含む初めの状態 $|\boldsymbol{p}_\text{i}\,;\,k, \lambda\rangle$ と，パイオンを 1 つ含む終わりの状態 $|p_\text{f}\rangle$ を考えよう．これらの状態の間で $\hat{\mathscr{H}}^1_{\text{int}}$ の行列要素を（e^2 項を含まない範囲で）計算しよう．初めの状態を

$$|p_\text{i}\,;\,k,\ \lambda\rangle = \hat{a}^\dagger(p_\text{i})\hat{a}^\dagger(k,\ \lambda)|0\rangle \tag{5.40}$$

と書く．記号 $|0\rangle$ で真空状態を表したが，これは自明な拡張として，光子もパイオンもない状態を表すと解釈しなくてはならない．形式的に言えば $|0\rangle = |0\rangle_\gamma \times |0\rangle_\pi$ である．

1 つの光子の吸収に相当する終わりの状態は

$$|p_\text{f}\rangle = \hat{a}^\dagger(p_\text{f})|0\rangle \tag{5.41}$$

である．必要な行列要素は

$$-\text{i}\langle 0|\,\hat{a}(p_\text{f})\left\{\int \text{d}^4x\,\hat{j}^\mu_{\text{em}}(x)\cdot\hat{A}_\mu(x)\right\}\hat{a}^\dagger(p_\text{i})\,\hat{a}^\dagger(k,\ \lambda)|0\rangle \tag{5.42}$$

と書ける．物質場のすべての演算子は，まったく独立な光子場の演算子 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ と交換するから，行列要素は 2 つの独立な部分の積に分離する．光子場に対しては

$$\langle 0|\,\hat{A}_\mu(x)\,|k,\ \lambda\rangle = \langle 0|\,\hat{A}_\mu(x)\,\hat{a}^\dagger(k,\ \lambda)|0\rangle \tag{5.43}$$

であり，荷電粒子場については

$$\langle p_\text{f}|\,\hat{j}^\mu_{\text{em}}(x)\,|p_\text{i}\rangle = \langle 0|\,\hat{a}(p_\text{f})\,\hat{j}^\mu_{\text{em}}(x)\,\hat{a}^\dagger(p_\text{i})|0\rangle \tag{5.44}$$

となる．

光子場の部分の式(5.43) は光子場 $\hat{A}_\mu$ の“1 粒子から真空”への行列要素で，4．2 節に述べたようにその値は光子の波動関数になるはずである．交換関係

$$[\,\hat{a}(k,\ \lambda),\ \ \hat{a}^\dagger(k',\ \lambda')] = 2\omega(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta_{\lambda\lambda'} \tag{5.45}$$

（そのほかの交換関係はゼロ）と真空の条件

$$\hat{a}(k,\ \lambda)|0\rangle=0,\ \text{すべての}\ k,\ \lambda\ \text{に対して} \tag{5.46}$$

を用いて行列要素は期待どおり（式(4.122) 参照）式(5.29) と同じく

$$N_k\varepsilon_\mu e^{-ik\cdot x} \tag{5.47}$$

となる．規格化定数 N_k はのちに定める．

スカラー場を含む式(5.44) は4つの演算子がいろいろな組み合わせで現れるのでもっと複雑である．そのうち2つは $\hat{j}^\mu_{em}$ から，残りは $|p_i\rangle$，$\langle p_f|$ から1つずつでてくる．例えば

$$\langle 0|\,\hat{a}(p_f)\hat{a}^\dagger(p_1)\hat{a}(p_2)\hat{a}^\dagger(p_i)|0\rangle \tag{5.48}$$

のような組み合わせに出会うが，このような項を計算する直接的な方法は，交換関係を何度も用いて $\hat{a}$ を右の端に $\hat{a}^\dagger$ を左の端に集め，真空条件

$$\hat{a}(p)|0\rangle=0,\qquad \langle 0|\,\hat{a}^\dagger(p)=0 \tag{5.49}$$

を用いることである．この結果式(5.48) は

$$\langle 0|[\,\hat{a}^\dagger(p_1)\hat{a}(p_f)+(2\pi)^3 2\omega_f\delta^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_f)]\times[\,\hat{a}^\dagger(p_i)\hat{a}(p_2)+(2\pi)^3 2\omega_i\delta^3(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_i)]|0\rangle \tag{5.50}$$

となり，実はただ1項

$$(2\pi)^6\delta^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_f)\delta^3(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_i)2\omega_f.2\omega_i \tag{5.51}$$

しか残ってこない．

しかし，この手続きをこのような方法で行うのは煩わしい．高次過程のような複雑な場合は特にそうである．そこで強力な使いやすい方法が開発されている．ここでは必要とする行列要素はすべて

$$\langle 0|\,\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\,|0\rangle \tag{5.52}$$

の形である．$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$，$\hat{D}$ は $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$，$\hat{b}$，$\hat{b}^\dagger$ か，一般にはその任意の線形結合，例えば $\hat{\phi}$ のような場の演算子である．例えば $\hat{A}$ が $\hat{a}+\hat{a}^\dagger$ の形を持つとしよう．真空の条件式(5.49) を使って式(5.52) は

$$\langle 0|\,\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\,|0\rangle=\langle 0|[\,\hat{a},\ \hat{B}\hat{C}\hat{D}]|0\rangle \tag{5.53}$$

と書くことができる．さて代数恒等式

$$[\,\hat{a},\ \hat{B}\hat{C}\hat{D}]=[\,\hat{a},\ \hat{B}]\hat{C}\hat{D}+\hat{B}[\,\hat{a},\ \hat{C}]\hat{D}+\hat{B}\hat{C}[\,\hat{a},\ \hat{D}] \tag{5.54}$$

を用いれば

$$\langle 0|\,\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\,|0\rangle=\langle 0|[\,\hat{a},\ \hat{B}]\hat{C}\hat{D}\,|0\rangle+\langle 0|\,\hat{B}[\,\hat{a},\ \hat{C}]\hat{D}\,|0\rangle+\langle 0|\,\hat{B}\hat{C}[\,\hat{a},\ \hat{D}]|0\rangle \tag{5.55}$$

である．この式の中の交換関係は，0でないならば単に$(2\pi)^3 2\omega\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$のような普通の数にほかならない．したがってこれを

$$\langle 0|\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}|0\rangle=[\hat{a},\ \hat{B}]\langle 0|\hat{C}\hat{D}|0\rangle+[\hat{a},\ \hat{C}]\langle 0|\hat{B}\hat{D}|0\rangle+[\hat{a},\ \hat{D}]\langle 0|\hat{B}\hat{C}|0\rangle \tag{5.56}$$

と書き直すことができる．さらに

$$[\hat{a},\ \hat{B}]=\langle 0|[\hat{a},\ \hat{B}]|0\rangle=\langle 0|\hat{a}\hat{B}|0\rangle=\langle 0|\hat{A}\hat{B}|0\rangle \tag{5.57}$$

に注意すると式(5.56)を極めて示唆に富む形に直すことができる．4つの演算子の積の真空期待値は，2つずつの可能な“縮約”（2つの場の積の真空期待値に与えた名称）の積の和で表される．

$$\langle 0|\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}|0\rangle=\langle 0|\hat{A}\hat{B}|0\rangle\langle 0|\hat{C}\hat{D}|0\rangle+\langle 0|\hat{A}\hat{C}|0\rangle\langle 0|\hat{B}\hat{D}|0\rangle+\langle 0|\hat{A}\hat{D}|0\rangle\langle 0|\hat{B}\hat{C}|0\rangle \tag{5.58}$$

この内容の一般的な結果はWickの定理（Wick，1950）と呼ばれ，場の量子論の摂動論の議論に欠かすことはできない．

式(5.44)の場合は，$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$，$\hat{D}$のいずれもが，$\hat{a}$，$\hat{b}$，$\hat{a}^\dagger$，$\hat{b}^\dagger$のどれかである．生成あるいは消滅演算子を奇数個含む積はすべて期待値が0になることは計算をせずに視察だけでわかる．その結果残ってくる項の数は大きく減る．式(5.44)の値が

$$\langle p_\mathrm{f}|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(x)\,|p_\mathrm{i}\rangle=eN_\mathrm{f}N_\mathrm{i}(p_\mathrm{i}+p_\mathrm{f})^\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_\mathrm{i}-p_\mathrm{f})\cdot x} \tag{5.59}$$

で与えられることを確めるのはよい演習である．(問題5.2参照)．この結果は式(5.10)と一致する．したがって，量子力学的な遷移カレントは，実は場の理論の電磁カレント演算子の行列要素である．

$$j^\mu_\mathrm{fi}(x)=\langle p_\mathrm{f}|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(x)\,|p_\mathrm{i}\rangle \tag{5.60}$$

これらの結果を組み合わせると，“波動関数”の振幅と“場の理論”の振幅とを次の式で結びつけることができた．

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{(1)}_\mathrm{fi}&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, j^\mu_\mathrm{fi}(x)A_\mu(x)\\&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\langle p_\mathrm{f}|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(x)\,|p_\mathrm{i}\rangle\langle 0|\hat{A}_\mu(x)|k,\ \lambda\rangle\end{aligned} \tag{5.61}$$

これから自信をもって図5.1の図形の振幅を解釈することができ，図形のいろいろな部分を振幅のいろいろな部分に対応させる正確な規則を与え，式(5.31)の完全な表式に到達することができる．今までに判明した規則は次のと

おりである．

（ｉ）　図形のどの線にも規格化因子“ N ”がつく．

（ii）　光子が吸収あるいは生成される頂点には，因子 $-\mathrm{i}e(p_\mathrm{i}+p_\mathrm{f})^\mu$ がつく．e は粒子の電荷である．

（iii）　入射する光子には偏りのベクトル ε_μ を，放出される光子には偏りのベクトル ε_μ^* を用いる．

（iv）　これらの因子をすべてかけ合わせ，その結果に全体の４元運動量を保存する δ 関数の因子（この場合は $(2\pi)^4\cdot\delta^4(p_\mathrm{f}-p_\mathrm{i}-k)$）をかける．

5．3　スピン０の荷電ボソンの電磁散乱

次に図 5.3 に記号的に示したような過程，電荷 e_a を持つ粒子が電荷 e_b を持つ粒子と行う電磁相互作用を考えよう．粒子“a”，“b”は互いに識別可能であるとする．

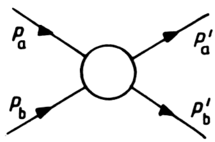


図 5.3　散乱過程　$\mathrm{a}+\mathrm{b}\to\mathrm{a}'+\mathrm{b}'$

この過程を，5．1 節で考えた場合の拡張として取り扱おう．これを１つの粒子（“a”とする）が，他の粒子によって作られる場によって散乱されるとみなす．のちに至って答は“a”と“b”に対して対称であることがわかる．最低次の振幅は前と同じく

$$\mathscr{A}=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x j_{\mathrm{a'a}}^\mu(x)A_\mu(x) \tag{5.62}$$

である．ただし $A_\mu(x)$ はこの場合“b”の運動によって生ずる場である．場 $A_\mu(x)$ が，今度は電流 j_μ が０ではなく運動 $\mathrm{b}\to\mathrm{b}'$ に伴う遷移カレントであるような Maxwell 方程式の解で与えられるはずだ，というのは極めてもっともらしく思えるであろう．

$$\Box A^{\mu}-\partial^{\mu}(\partial_{\nu}A^{\nu})=j^{\mu}_{\mathrm{b'b}} \tag{5.63}$$

ここで式(5.59) を参照すれば

$$j^{\mu}_{\mathrm{b'b}}(x)=e_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{b'}}(p'_{\mathrm{b}}+p_{\mathrm{b}})^{\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_{\mathrm{b}}-p'_{\mathrm{b}})x} \tag{5.64}$$

である．

式(5.63) は，再び Lorentz 条件の式(5.13) によって A^{μ} の各成分を分離することができれば，ずっと解きやすくなるであろう．しかし A^{μ} はもはや自由場ではないので，もしかすると，Lorentz 条件は Maxwell 方程式(5.63) と矛盾するかもしれない．しかし，実はうまくいく．式(5.63) より

$$\partial_{\mu}A^{\mu}=0 \text{ のときは } \partial_{\mu}j^{\mu}_{\mathrm{b'b}}=0 \tag{5.65}$$

を要請すれば，式(5.64) より

$$\partial_{\mu}j^{\mu}_{\mathrm{b'b}}=\mathrm{i}e_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{b'}}(p'^2_{\mathrm{b}}-p^2_{\mathrm{b}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_{\mathrm{b}}-p'_{\mathrm{b}})\cdot x}=0 \tag{5.66}$$

が成り立つ．$p^2_{\mathrm{b}}=p'^2_{\mathrm{b}}=M^2$ だからである．したがって A^{μ} に対しては $q^{\mu}=(p'_{\mathrm{b}}-p_b)$ とおいて

$$\Box A^{\mu}=e_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{b}}N'_{\mathrm{b}}(p'_{\mathrm{b}}+p_{\mathrm{b}})^{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \tag{5.67}$$

を解けばよい．

$$\Box \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}=-q^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \tag{5.68}$$

に注意すれば視察により解

$$A^{\mu}=-(q^2)^{-1}e_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{b}}N'_{\mathrm{b}}(p'_{\mathrm{b}}+p_{\mathrm{b}})^{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \tag{5.69}$$

を得る．これを式(5.62)に挿入すると行列要素は

$$\mathscr{A}=-\mathrm{i}\int j^{\mu}_{\mathrm{a'a}}(x)\cdot\frac{-1}{q^2}j_{\mu\mathrm{b'b}}(x)\mathrm{d}^4x \tag{5.70}$$

$$=-\mathrm{i}e_{\mathrm{a}}e_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{a}}N_{\mathrm{b}}N'_{\mathrm{a}}N'_{\mathrm{b}}(p_{\mathrm{a}}+p'_{\mathrm{a}})^{\mu}(p_{\mathrm{b}}+p'_{\mathrm{b}})_{\mu}\cdot-\frac{1}{q^2}\cdot\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'_{\mathrm{a}}+p'_{\mathrm{b}}-p_{\mathrm{a}}-p_{\mathrm{b}})\cdot x} \tag{5.71}$$

$$=-\mathrm{i}e_{\mathrm{a}}e_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{a}}N_{\mathrm{b}}N'_{\mathrm{a}}N'_{\mathrm{b}}(p_{\mathrm{a}}+p'_{\mathrm{a}})^{\mu}\cdot-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\cdot(p_{\mathrm{b}}+p'_{\mathrm{b}})^{\nu}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(p'_{\mathrm{a}}+p'_{\mathrm{b}}-p_{\mathrm{a}}-p_{\mathrm{b}}) \tag{5.72}$$

$$\equiv-\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p'_{\mathrm{a}}+p'_{\mathrm{b}}-p_{\mathrm{a}}-p_{\mathrm{b}})N_{\mathrm{a}}N'_{\mathrm{a}}N_{\mathrm{b}}N'_{\mathrm{b}}F \tag{5.73}$$

で与えられる．

前述のごとくこの表式は入れ替え a ⟷ b に対して変わらない対称な形をしている．エネルギー・運動量を保存する δ 関数より

$$q=p'_{\mathrm{b}}-p_{\mathrm{b}}=p_{\mathrm{a}}-p'_{\mathrm{a}}$$

であることに注意．

この結果を図形を用いて解釈できるであろうか．振幅は図形と対応がつくように書いておいた．すでに，項 $(p_a+p'_a)^\mu$ と $(p_b+p'_b)^\nu$ は放出および吸収の頂点からくることを知っている．またこの過程では始めの状態にも終わりの状態にも光子はない．したがって光子は図5.4のように，1つの粒子から放出され他の粒子に吸収されなくてはならない(これは2通りの方法で起こりうる)．この場合は，因子 $-g_{\mu\nu}/q^2$ が図5.4の2つの過程の和に対応していなくてはならない．5．6節でこの点について詳しく追及する．しばらくの間，断面積を計算することに専念しよう．

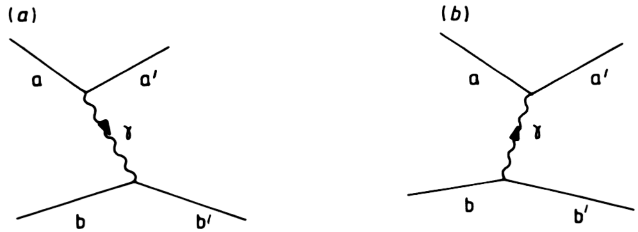


図5.4　2つの1光子交換過程　(a)では粒子"a"が光子を放出し，粒子"b"が光子を吸収する　(b)では"b"が放出し"a"が吸収する

5．4　2粒子散乱の断面積

一般の2体過程 $1+2\longrightarrow 3+4$ を考えよう．ここで数字は粒子の運動量を区別する名前として用いる．まず波動関数の規格化を決めなくてはならない．

平面波の解を

$$\phi_i=N_i e^{-ip_i\cdot x} \tag{5.74}$$

で定義したので，正エネルギーのKG粒子に対する確率密度は

$$\rho_i=i\left[\phi_i^*\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\phi_i^*}{\partial t}\right)\phi_i\right]=2N_i^2E_i \tag{5.75}$$

である．NRQMでは，体積 V の中に1個の粒子が存在するように規格化するが，ここではそれとは違って，体積 V の中に $2E$ 個の粒子が存在するように規

格化する．この規格化は ρ が4元ベクトルの時間成分であることとよく整合し，したがって“共変的規格化条件”と呼ばれる．適当なフラックス（粒子の流れ）と相空間の因子を採用する限り，どちらの選択も完全に正当である．

条件

$$\int_V \rho_i \mathrm{d}^3 x = 2E_i \tag{5.76}$$

のもとに，

$$N_i = V^{-1/2} \tag{5.77}$$

の結果をうる．

断面積を導く3つの段階は次のとおりである．

(1)　単位体積あたりの遷移の割合は

$$P_{fi} = |\mathscr{A}_{fi}|^2/VT \tag{5.78}$$

である．T は相互作用をしている時間である．おおざっぱに“δ 関数を2乗する”か†，あるいは細心に波束を用いて（たとえば Taylor，1972，第3章参照）

$$P_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)(N_1 N_2 N_3 N_4)^2 |F|^2 \tag{5.79}$$

をうる．ただし

$$\mathscr{A}_{fi} = -\mathrm{i}(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) N_1 N_2 N_3 N_4 \cdot F \tag{5.80}$$

で F を定義する．（式(5.73) を参照）

(2)　実験から実験へと比較できる量をうるためには，遷移の割合から，粒子の入射フラックスおよび単位体積あたりの標的粒子の数の依存性を，あらかじめ除いておかなくてはならない．

(a)　静止している標的に入射するビーム（線束）のフラックスは，単位時間に標的に達しうる単位面積あたりの粒子数である．したがって“有効な”体積は $|\boldsymbol{v}|$，すなわち入射粒子の速度の大きさである．体積 V の中に $2E_1$ 個の粒子と規格化したのだから，フラックスの大きさは

$$|\boldsymbol{v}|\frac{2E_1}{V} \tag{5.81}$$

である．

---

†（訳注）　$[\delta^4(p)]^2 = \delta^4(p)\cdot\delta^4(0)$，$\delta^4(0) = (2\pi)^{-4}\int e^{i0\cdot x}\mathrm{d}^4 x = (2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4 x = (2\pi)^{-4}\cdot VT$

(b)　標的粒子の数は，単位体積あたり $2E_2/V$ である．もし粒子２が静止していれば，実際は $2m_2/V$ である．

規格化によらない量をうるには，P_{fi} をフラックス因子および単位体積中の標的粒子数の積

$$|\boldsymbol{v}|\frac{2E_1\cdot 2E_2}{V^2} \tag{5.82}$$

で割らなくてはならない．

(3)　物理的な散乱断面積をうるには，すべての可能な２粒子終状態について和をとらなくてはならない．体積 V の中に１粒子が含まれているとき，これはいつもの２体の相空間因子（相体積）

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3p_3\frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3p_4 \tag{5.83}$$

を乗じて積分することを意味する．われわれの規格化では，体積 V の中に $2E$ 個の粒子が存在するのだから，１粒子あたり利用可能な相体積は

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_3}{2E_3}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{2E_4} \tag{5.84}$$

である．これらの考察をすべて１つにまとめると，断面積は次の式で与えられる．

$$\mathrm{d}\sigma=P_{\mathrm{fi}}\frac{V^2}{2E_1\cdot 2E_2|\boldsymbol{v}|}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_3}{2E_3}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{2E_4} \tag{5.85}$$

P_{fi} および N_{i} の表式を代入すると結果は

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{|F|^2}{2E_1\cdot 2E_2|\boldsymbol{v}|}(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\frac{\mathrm{d}^3p_3}{2E_3(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{2E_4(2\pi)^3} \tag{5.86}$$

である．次のことに注意せよ．

(ｉ)　規格化体積 V を含む因子は消去されている．

(ii)　一直線上の衝突に対するフラックス因子は，関係式（問題５．４参照．特別な座標系で簡単に証明できる）

$$E_1E_2|\boldsymbol{v}|=[(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2]^{1/2} \tag{5.87}$$

を用いて，相対論的不変な形に書ける．

(iii)　４次元の δ 関数と（因子 $1/2E$ を含む）相体積との積は，Lorentz 不変な相体積と呼ばれ，

$$\mathrm{dLips}(s\,;\,p_3,\ p_4) \tag{5.88}$$

と書かれることがある．ここに s は Mandelstam 変数

$$s=(p_1+p_2)^2 \tag{5.89}$$

である．(例えば Perkins，1987 参照)

5. 5　2 体反応 a+b ⟶ a′+b′ の断面積のあからさまな計算

5. 3 節で $p_a=p_1$，$p'_a=p_3$，$p_b=p_2$，$p'_b=p_4$ とおいて 5. 4 節の結果を応用する．微分断面積は次の式で与えられる．

$$\boxed{d\sigma=\frac{|F|^2}{4[(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2]^{1/2}}\mathrm{dLips}(s\,;\,p_3,\ p_4)} \tag{5.90}$$

この式の中の電磁相互作用の不変振幅 F は

$$F=(e^2/q^2)(p_1+p_3)_\mu(p_2+p_4)^\mu \tag{5.91}$$

で与えられ，また Lorentz 不変な 2 粒子相体積は

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{dLips}(s\,;\,p_3,\ p_4)&=(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\\&\quad\times\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_3}{2E_3}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_4}{2E_4}\end{aligned}} \tag{5.92}$$

である．これらの因子は今後もよく現れるから，重心系 (CM) で計算をしておこう．重心系は

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4=0 \tag{5.93}$$

で定義される．図 5.5 に示すように，散乱は重心系での散乱角 θ_{CM} と，次の式で

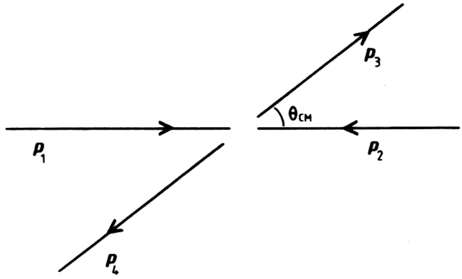


図 5.5　重心系における 2 体散乱

定義される 4 個の 4 元運動量で記述される．

$$p_1^\mu=(E_1,\ \boldsymbol{p}) \qquad p_3^\mu=(E_1,\ \boldsymbol{p}')$$
$$p_2^\mu=(E_2,\ -\boldsymbol{p}) \qquad p_4^\mu=(E_2,\ -\boldsymbol{p}') \tag{5.94}$$

ここで

$$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|=p \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned} W&=E_1+E_2=E_3+E_4 \\ &=(p^2+m_1^2)^{1/2}+(p^2+m_2^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{5.96}$$

が成り立ち，W は重心系のエネルギーである．

5．5．1　重心系における 2 体相体積の計算

重心系に移る前に，相空間の体積

$$\mathrm{dLips}(s\ ;\ p_3,\ p_4)=\frac{1}{(4\pi)^2}\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\frac{\mathrm{d}^3p_3}{E_3}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{E_4} \tag{5.97}$$

を簡単にしておくと便利である．3 元運動量の δ 関数を用いて d^3p_4 に関する積分を消去できる：

$$\int\frac{\mathrm{d}^3p_4}{E_4}\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)=\frac{1}{E_4}\delta(E_3+E_4-E_1-E_2) \tag{5.98}$$

右辺の $\boldsymbol{p}_4$ と E_4 はもはや独立変数ではなく，条件

$$\boldsymbol{p}_4=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3, \qquad E_4=(|\boldsymbol{p}_4|^2+m_2^2)^{1/2} \tag{5.99}$$

から決まってしまう．

次に，d^3p_3 を角変数で表す：

$$\mathrm{d}^3p_3=\mathrm{d}\Omega\, p_3^2\mathrm{d}p_3 \tag{5.100}$$

ここで p_3 は，3 元運動量 $\boldsymbol{p}_3$ の大きさである．エネルギーと運動量は，

$$E_3^2=p_3^2+m_1^2 \tag{5.101}$$

のように関係しているから，

$$E_3\mathrm{d}E_3=p_3\mathrm{d}p_3 \tag{5.102}$$

が成り立つ．このように変形すると，任意の座標系で成立する結果

$$\mathrm{dLips}(s\ ;\ p_3,\ p_4)=\frac{1}{(4\pi)^2}\mathrm{d}\Omega\,\frac{p_3\mathrm{d}E_3}{E_4}\delta(E_3+E_4-E_1-E_2) \tag{5.103}$$

をうる．さて重心系に移ると

$$E_3^2=p^2+m_1^2 \tag{5.104}$$

$$E_4^2=p^2+m_2^2 \tag{5.105}$$

$$E_3\mathrm{d}E_3=p\mathrm{d}p=E_4\mathrm{d}E_4 \tag{5.106}$$

である．新しい変数

$$W'=E_3+E_4 \tag{5.107}$$

を導入しよう．E_3+E_4 はエネルギー保存を表す δ 関数の積分を行った後では，$W=E_1+E_2$ に等しくなるという制約を受けるが，積分を行う前は独立な変数である．したがって，式(5.106) を用いて

$$\mathrm{d}W'=\mathrm{d}E_3+\mathrm{d}E_4=\frac{W'}{E_3E_4}p\mathrm{d}p=\frac{W'}{E_4}\mathrm{d}E_3 \tag{5.108}$$

をうる．したがって因子

$$p_3\frac{\mathrm{d}E_3}{E_4}\delta(E_3+E_4-E_1-E_2)$$

は

$$\frac{p}{W'}\mathrm{d}W'\delta(W'-W)=\frac{p}{W} \tag{5.109}$$

となり，重心系における2体相体積として重要な結果

$$\boxed{\mathrm{dLips}(s\,;\,p_3,\ p_4)=\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{p}{W}\mathrm{d}\Omega} \tag{5.110}$$

に到達する．

5．5．2　重心系のフラックス因子

f を

$$f^2=(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2 \tag{5.111}$$

で定義し，重心系での関係式

$$p_1\cdot p_2=E_1E_2+p^2 \tag{5.112}$$

を用いて直接計算すれば

$$f=pW \tag{5.113}$$

が得られる．重心系の微分断面積

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4f}|F|^2\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{p}{W}\mathrm{d}\Omega \tag{5.114}$$

は直ちに書き下すことができて

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{CM}}=\frac{1}{(8\pi W)^2}|F|^2} \tag{5.115}$$

である．$|F|^2$ を計算する前に，変数変換の練習としてこの式を不変な形に書き直してみよう．4 元運動量移行の 2 乗は，Mandelstam の t 変数と呼ばれる：

$$t=q^2=(p_1-p_3)^2=(p_4-p_2)^2 \tag{5.116}$$

重心系ではこの変数は

$$t=-2p^2(1-\cos\theta_{\mathrm{CM}}) \tag{5.117}$$

に帰着し，したがって

$$\mathrm{d}t=2p^2\mathrm{d}(\cos\theta_{\mathrm{CM}}) \tag{5.118}$$

が成り立つ．スピンを持たない粒子の散乱は，ビームの軸の回りに回転対称の性質（円筒対称）があるから

$$\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{CM}}=2\pi\mathrm{d}(\cos\theta_{\mathrm{CM}}) \tag{5.119}$$

であり，次の関係が成り立つ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{p^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{CM}}} \tag{5.120}$$

したがって，2体微分断面積の不変形は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{64\pi}\frac{1}{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}|F|^2 \tag{5.121}$$

または s 変数を用いて（問題5．4参照）

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{16\pi}\frac{1}{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}|F|^2} \tag{5.122}$$

と書くことができる．これらの表式は，偏りを考慮しない場合には，すべての2体の弾性散乱に適用できるものである．a＋b 散乱については，$|F|^2$ の計算だけが残っている．

$$|F|^2=\left(\frac{e_\mathrm{a}e_\mathrm{b}}{q^2}\right)^2[(p_1+p_3)\cdot(p_2+p_4)]^2 \tag{5.123}$$

弾性散乱に関しては，定義

$$s=(p_1+p_2)^2=(p_3+p_4)^2 \tag{5.124}$$

$$u=(p_1-p_4)^2=(p_2-p_3)^2 \tag{5.125}$$

から関係

$$2p_1\cdot p_2=2p_3\cdot p_4=s-m_1^2-m_2^2 \tag{5.126}$$

$$2p_1\cdot p_4=2p_2\cdot p_3=m_1^2+m_2^2-u \tag{5.127}$$

が導かれる．こうして $e_a=e_b=e$ の場合 不変式

$$|F|^2=(4\pi\alpha/t)^2(s-u)^2 \tag{5.128}$$

の形で最終結果が得られる．ただし

$$\alpha=e^2/4\pi\simeq\frac{1}{137} \tag{5.129}$$

は自然単位系の微細構造定数である（付録 B，C を参照）．

これらの不変表式を任意の座標系で計算することは別に特別なやり方があるわけではない．例えば，“a”が電荷 eZ_a，質量 m を持つ粒子で，“b”が電荷 eZ_b，質量 M を持つ粒子で $m\ll M$ と仮定する．これは軽い粒子が重い原子核によって電磁散乱を受ける過程か，あるいは“スピンを持たない”電子が“スピンを持たない”陽子と散乱する過程を模擬する（スピンを考慮するときの複雑さは第 6 章で取り扱う）．始状態で“b”が静止している実験室系

$$p_b=(M,\ \mathbf{0}) \tag{5.130}$$

で計算しよう．軽い粒子の 4 元運動量は，m を省略すれば

$$p_a=(\omega_a,\ \boldsymbol{k})\simeq(|\boldsymbol{k}|,\ \boldsymbol{k}) \tag{5.131}$$

$$p_a'=(\omega_a',\ \boldsymbol{k}')\simeq(|\boldsymbol{k}'|,\ \boldsymbol{k}') \tag{5.132}$$

である．そうすると

$$t=q^2=(p_a-p_a')^2=-2|\boldsymbol{k}|\cdot|\boldsymbol{k}'|\cdot(1-\cos\theta)$$
$$=-4|\boldsymbol{k}|\cdot|\boldsymbol{k}'|\cdot\sin^2\theta/2 \tag{5.133}$$

が成り立つ．$p_b'=p_b+(p_a-p_a')$ と書いて 2 乗すれば $2p_b\cdot q+q^2=0$ であるから

$$|\boldsymbol{k}|/|\boldsymbol{k}'|=1+(2|\boldsymbol{k}|/M)\sin^2\theta/2 \tag{5.134}$$

が出てくる．さらに近似

$$|\boldsymbol{k}|\ll M \tag{5.135}$$

を課すと $|\boldsymbol{k}|\simeq|\boldsymbol{k}'|$ とおくことができ

$$t\simeq-4|\boldsymbol{k}|^2\sin^2\theta/2 \tag{5.136}$$

$$\mathrm{d}t\simeq2|\boldsymbol{k}|^2\mathrm{d}(\cos\theta) \tag{5.137}$$

と書ける．式(5.121) のフラックス因子は，m を省略する近似で

$$(p_\mathrm{a}\cdot p_\mathrm{b})^2-m^2M^2\simeq M^2\omega_\mathrm{a}^2\simeq M^2|\boldsymbol{k}|^2 \tag{5.138}$$

である．また Mandelstam 変数

$$s=(p_\mathrm{a}+p_\mathrm{b})^2=(\omega_\mathrm{a}+M)^2-\boldsymbol{k}^2\simeq 2|\boldsymbol{k}|M+M^2 \tag{5.139}$$

$$u=(p_\mathrm{a}-p_\mathrm{b}')^2\simeq -2|\boldsymbol{k}|M+M^2 \tag{5.140}$$

を用いると

$$(s-u)^2\simeq 16|\boldsymbol{k}|^2M^2 \tag{5.141}$$

を得る．これらの部分をつなぎ合わせれば最後の結果

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2Z_\mathrm{a}^2Z_\mathrm{b}^2}{4|\boldsymbol{k}|^2\sin^4\theta/2} \tag{5.142}$$

が出てくる．ここで $\mathrm{d}\Omega=2\pi\mathrm{d}(\cos\theta)$ である．これは Rutherford の散乱断面積として知られている．

同じような実験室系の断面積が第6章，6．8節で再び出てくるが，そこでは低エネルギー近似の式(5.135)を使わないで計算する．これはなかなか巧妙な計算なので付録Eに述べてある．

5．6　交換過程としての散乱：場の量子論における力と行列要素を求める Feynman 図形

もちろん Rutherford 断面積を導くために本書の5つの章をすっかり渉猟する必要はない．しかし必要があれば，この方法で Rutherford 散乱式が導けることは満足すべきことである．当然のことながら，より複雑ないろいろな補正も，いまではこの強力な定式化を用いて計算することができる．まず最初に，よく知っている Rutherford 散乱式が場の理論の言葉からどう出てくるかを考えよう．この式が Coulomb ポテンシャルと結びついていることははじめから周知である．場の理論では，力は場のポテンシャルの量子の交換によって生ずることが明らかになる．

Coulomb 散乱の Rutherford 散乱式が，普通の非相対論的量子力学でどう得られるか，極めて簡単に振り返ってみるのは有用である．静的な Coulomb ポテンシャル $e_\mathrm{a}e_\mathrm{b}/r$ を自由粒子の Schrödinger 方程式の摂動として扱い，その最低次の振幅として

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{\mathrm{R}}=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathrm{f}}t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}(e_{\mathrm{a}}e_{\mathrm{b}}/r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathrm{i}}t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.143}$$

$$=-\mathrm{i}2\pi\cdot\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}})e_{\mathrm{a}}e_{\mathrm{b}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}(1/r)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{5.144}$$

をうる(付録 A の式(A.20) を参照). ここで $r=|\boldsymbol{x}|$ である. ここの Fourier 変換は大きな r に対しては見かけ上不備である. 体積要素は$r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega$ であるから積分は発散する. この難点を乗り越える有力な工夫として, 積分の中に収斂因子を導入すると

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\cdot(1/r)\cdot\mathrm{e}^{-\mu r}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega \tag{5.145}$$

となり, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$ である. 問題 5. 5 でこの積分を計算してあるが, その結果振幅の式(5.144) は

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{\mathrm{R}}=-\mathrm{i}2\pi\cdot\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}})e_{\mathrm{a}}e_{\mathrm{b}}\cdot 4\pi/(\boldsymbol{q}^2+\mu^2) \tag{5.146}$$

となる. 注目すべきことは, この時点で $\mu\to 0$ の極限をとることに何の困難もない.

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{\mathrm{R}}=-\mathrm{i}2\pi\cdot\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}})e_{\mathrm{a}}e_{\mathrm{b}}\cdot 4\pi/\boldsymbol{q}^2 \tag{5.147}$$

ところで

$$\boldsymbol{q}^2\simeq 4\boldsymbol{k}^2\sin^2\theta/2 \tag{5.148}$$

であるから, 振幅の 2 乗から $\sin^{-4}(\theta/2)$ がでてくることがわかる. これは遷移確率したがって断面積にそのまま効いてくる. これが必要なものすべてであって, “定ポテンシャル内の 1 粒子”問題のフラックスや位相因子などには立ち入らない (量子力学の教科書参照).

5. 3 節の計算に戻り, それを場の理論の言葉を少し使って再解釈してみよう. まず第 1 に, 振幅(5.73)は e について 2 次であることに注目する. e_{a}, e_{b} がともに e に比例するからである. これは摂動 $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}$ の言葉では, 2 次の摂動の振幅とみなすべきことを示唆する.

摂動論の定式化は付録 A. 3 に簡潔に述べてある. 式(A.80) ～(A.82) より 1 次の表式(5.35) は

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)}=-\mathrm{i}\langle\mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle 2\pi\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}}) \tag{5.149}$$

と等価であることがわかる. ここで付録 A の式(A.78) より

$$\langle \mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\langle \mathrm{f}|\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)|\mathrm{i}\rangle \tag{5.150}$$

であり，$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)$ は Schrödinger 描像の相互作用ハミルトニアンである．$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)$ は式(5.36)の形で与えられるが，右辺の場は Schrödinger 描像の場で，展開(5.38) の中で $t=0$ とおいたものと解釈する．例えば

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x},\ 0)=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E}[\hat{a}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+\hat{b}^{\dagger}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}] \tag{5.151}$$

である．$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)$ は時間によらないから，NRQM より時間によらないポテンシャルに対する遷移の理論の周知の定式化を用いて，２次の摂動振幅として

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(2)}=-\mathrm{i}\sum_{n\neq \mathrm{i}}\langle \mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|n\rangle\frac{1}{E_{\mathrm{i}}-E_n}\langle n|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle 2\pi\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}}) \tag{5.152}$$

をうる（式(A.84) 参照）．図 5.3 の a＋b→a′＋b′ の過程については，式(5.152)は

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(2)}=-\mathrm{i}\sum_{\substack{n\\ E_n\neq E_{\mathrm{a}}+E_{\mathrm{b}}}}\left\{\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\langle p_{\mathrm{a}}'p_{\mathrm{b}}'|\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)|n\rangle\right\}\frac{1}{E_{\mathrm{a}}+E_{\mathrm{b}}-E_n}$$
$$\times\left\{\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\langle n|\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x}',\ 0)|p_{\mathrm{a}}p_{\mathrm{b}}\rangle\right\}2\pi\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}}) \tag{5.153}$$

になる．この方程式の大切な特徴を強調しておこう．積分は３次元の空間にのみかかわって行い，時間では積分していない．これは，式(5.151)のような平面波の表式を代入して積分すると，“中間状態”$|n\rangle$ に関する限り運動量を保存する δ 関数は出てくるが，エネルギーを保存する δ 関数は出てこない．実は摂動論ではいつもそうである．式(5.153) の中には全体にわたるエネルギーの保存 $E_{\mathrm{a}}+E_{\mathrm{b}}=E_{\mathrm{a}}'+E_{\mathrm{b}}'$ を保証する δ 関数があからさまに含まれている．しかしもし $E_{\mathrm{a}}+E_{\mathrm{b}}$（あるいは $E_{\mathrm{a}}'+E_{\mathrm{b}}'$）がまた E_{n} に等しければ，式(5.153) の中の分子が0になって表式は無意味になる．エネルギーと運動量を非対称に扱うのは，Lorentz 不変性を破る恐れがありはしないかと思わせる．しかし，この“非共変的な摂動論”と呼ばれる定式化は，最後には完全に Lorentz 不変な答を導くことがあとでわかる．

式(5.153)の計算を続けよう．演算子の代数を軽減するためと，一方それが極めて物理的であるから，すでに導入した行列要素を図形で表す方法は自由に用いることにする．まずはじめに“中間状態”$|n\rangle$ が何であるか決めよう．$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}$ は

光子を１つ放出するか吸収する過程を誘起する．したがって状態 $|n\rangle$ の唯一の可能性は，２粒子と１光子が共存する状態である．光子は式(5.153)の“第一の”演算子（右側）で作られ，第二の演算子で消滅する．しかし，この光子は a か b かで作られ，a′ か b′ かで消滅するかもしれない．光子が生成したと同じ粒子に吸収されるなら，振幅は図 5.6 に示した図形に対応して計算することになる．これらは興味深い過程でいつか立ち戻ってくるが(5．9 節)，直観的には粒子間の相互作用には対応しないことが明らかであろう．したがってすでに図 5.4 で導入した２つの過程，図 5.7 (*a*)，図 5.7 (*b*) に再録してある過程に至る．図を再録した理由は，２つの場合に状態 $|n\rangle$ の性質をあからさまにしたいからである．図 5.7 (*a*) を考えると，これに対する式(5.153) の第二の行列要素は

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \langle p_\mathrm{a}',\ p_\mathrm{b}\ ;\ k,\ \lambda|\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x}',\ 0)|p_\mathrm{a},\ p_\mathrm{b}\rangle \tag{5.154}$$

である．状態 $\langle n|$ には２つの粒子と放出された１光子が存在する．同じように



図 5.6　1 光子が放出され同じ粒子に吸収される過程

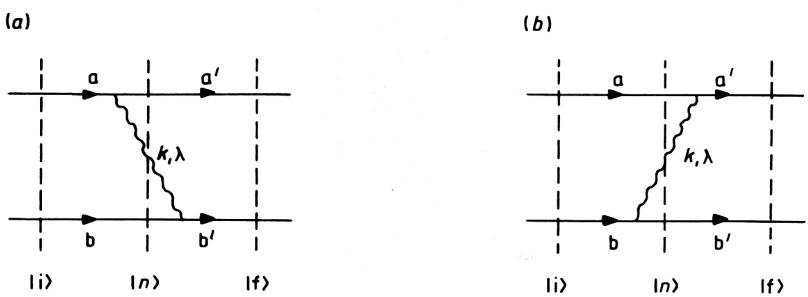


図 5.7　1 光子交換を行う 2 つの過程

第一の行列要素は

$$\int d^3\boldsymbol{x}\langle p'_a,\ p'_b|\hat{\mathscr{H}}_{int}(\boldsymbol{x},\ 0)|p'_a,\ p_b\ ;\ k,\ \lambda\rangle \tag{5.155}$$

である．中間状態 $|n\rangle$ はしたがって

$$|n\rangle=|p'_a,\ p_b\ ;\ k,\ \lambda\rangle \tag{5.156}$$

で，$|n\rangle$ についての和はすべての可能な k と λ の値にわたる．式(5.153)のエネルギー E_n は

$$E_n=E'_a+E_b+E_k \tag{5.157}$$

である．式(5.154) の中の "b" 粒子と式(5.155) の中の "a" 粒子は演算子 $\hat{\mathscr{H}}_{int}$ によってまったく影響を受けないことは明らかである．実際扱っている量は

$$\int d^3\boldsymbol{x}'\langle p'_a\ ;\ k,\ \lambda|\hat{\mathscr{H}}_{int}(\boldsymbol{x}',\ 0)|p_a\rangle,\ \int d^3\boldsymbol{x}\langle p'_b|\hat{\mathscr{H}}_{int}(\boldsymbol{x},\ 0)|p_b\ ;\ k,\ \lambda\rangle \tag{5.158}$$

である．しかしこれらは5．2節および5．1節で考えた行列要素とほとんどそのまま等しい．ただ1つの違いは時間の座標が0におかれ，積分が3次元の空間にだけわたっていることである．その結果，式(5.31) のような表式で $(2\pi)^4\delta^4(\ \ )$ の因子はすべて $(2\pi)^3\delta^3(\ \ )$ で置き換えられ，エネルギー保存でなく運動量の保存を表すことになる．したがって図 5.7 (a) に対して振幅は

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{fi}^{(2)}=&-i\sum_{k,\lambda}e_bN_bN'_bN_k(p_b+p'_b)^\mu\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}'_b-\boldsymbol{p}_b-\boldsymbol{k})\\&\times\frac{1}{E_a+E_b-(E'_a+E_b+E_k)}\cdot e_aN_aN'_aN_k(p_a+p'_a)^\nu\\&\times\varepsilon_\nu^*(k,\ \lambda)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_a-\boldsymbol{p}'_a-\boldsymbol{k})2\pi\delta(E'_a+E'_b-E_a-E_b)\end{aligned} \tag{5.159}$$

である．この式で k についての"和"は $\int d^3\boldsymbol{k}/(2\pi)^3\cdot 2E_k$ を意味し，体積を表す因子はいつものようにおのずから消去されると予想して書いていない．δ 関数の1つを用いて積分を実行すれば結果は

$$\begin{aligned}&-i(2\pi)^4\delta^4(p'_a+p'_b-p_a-p_b)N_aN_bN'_aN'_be_ae_b(p_b+p'_b)^\mu(p_a+p'_a)^\nu\\&\times\left\{\sum_\lambda\frac{\varepsilon_\nu^*(k,\ \lambda)\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)N_k^2}{2E_k(E_a-E'_a-E_k)}\right\}\end{aligned} \tag{5.160}$$

となり，式(5.72) に非常に近い形になった．

このほかに図 5.7 (b) も考えなくてはならない．しかし図 5.7 (a) との違いは，明らかに

$$E_n=E'_b+E_a+E_k \tag{5.161}$$

が成り立ちかつ式(5.160) の中のかっこ｛　　｝の中で $\varepsilon \rightleftarrows \varepsilon^*$ となる点だけである．実際，すぐ $\sum_\lambda \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^*$ は実数でありただ1つ実質的な違いは式(5.160)の分母が $E'_{\rm a}-E_{\rm a}-E_k$ で置き換わることだけであることが判明する．ここで全体にわたるエネルギー保存則を用いた．さて

$$\frac{1}{2E_k}\left\{\frac{1}{E_{\rm a}-E'_{\rm a}-E_k}-\frac{1}{E_{\rm a}-E'_{\rm a}+E_k}\right\}=\frac{1}{(E_{\rm a}-E'_{\rm a})^2-E_k^2} \tag{5.162}$$

が成り立つことに注意する．ここに式(5.159) の中の δ 関数より

$$E_k^2=\boldsymbol{k}^2=(\boldsymbol{p}_{\rm a}-\boldsymbol{p}'_{\rm a})^2 \tag{5.163}$$

である．したがって式(5.162) の右辺はまさに

$$1/q^2 \tag{5.164}$$

であって，4元ベクトル $q^2=(p_{\rm a}-p'_{\rm a})^2$！になっている．これはもちろん式(5.72)に現れる $1/q^2$ の因子である．

これは注目すべき結果である．すでに予告したように（また付録A.3も参照)，それぞれは共変的でない2つの別々の振幅の和は，ただ1つの不変的な表式となり，図5.8に示す1つの“Feynman図形”で表されることがわかったからである．(以下に見るように，式(5.160) の中の偏光ベクトルの和は式(5.72)の $g_{\mu\nu}$ 因子になるが，これは決して自明でない結果である．）図5.8の1光子交換過程の“Feynman図形”では，光子線は垂直に書いてあるが，これは図5.4の時間的順序の異なる2つの過程を含むことを意味している．

さて以上の段階で基本的な再解釈を行った．図5.7(*a*)，5.7(*b*)で光子は質量0である ($E_k^2-\boldsymbol{k}^2=0$) が各頂点でエネルギーは保存していない．これは何回も繰り返し強調したことであるが，量子力学の2次の摂動論ではまったく普通の

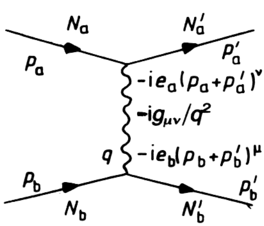


図5.8　1光子交換の Feynman 図形

事情である．それゆえ状態$|n\rangle$を“仮想の”とか“中間の”とか呼ぶ．しかしこれはエネルギーを選別しているから本質的に非共変的な言い方である．これに比べて，図5.8はまったく異なったように解釈することができる．各頂点で不変的な4元運動量の保存を仮定すれば，$q=p_a-p'_a$は光子の4元運動量と解釈することができる．そうすると光子の質量はq^2となり0ではない．そこでこの光子も“仮想的”と呼ぶ．図5.8の大きな利点は，そこから1つの表式が出てそれが不変であることである．相対論には静止質量の保存則はなく，あるのは4元運動量の保存則である．したがって，中間状態の光子が“質量殻の外”（$q^2\neq 0$）に出ることを許容すれば，完全に不変形を維持できるのである．“不変的な”場の理論の摂動論が与えるであろう表式は，図5.8の振幅なのである．

議論はもはや終わりに近い．残っている仕事は，式(5.160)の中の偏りについての和と$g_{\mu\nu}$因子との関連を明確にすることである．本質的な問題は，正確な偏り成分λとして何を考えねばならないかである．もし図5.7の光子が自由量子であるなら，5. 12節から答は既知であろう — λは2つの横偏極の状態にわたるのである．しかし今の場合，光子は荷電粒子（場の源）と相互作用しており，話はずっと複雑である．Lorentz不変な行列要素(5.72)の形を導きたいのである．しかも今の場合はLorentzゲージ$\partial_\mu \hat{A}^\mu=0$を用いたいのである．実際，式(5.72)の（場の理論的でない）はじめの導き方では，式(5.65)でこの条件を課した．しかし場の理論では（Aitchison, 1982の4. 1節，Mandl and Shaw, 1984の5. 2節），$\partial_\mu \hat{A}^\mu=0$（定数）という条件は場の量の交換関係と矛盾し，したがってこの条件を演算子の条件として課すことはできない．その代わり，この条件は光子の状態を規制するものと考えるのである．その結果，式(5.160)の中のλの和は，次に定義するような4つの偏光状態すべてにわたってとるべきことが判明する．$\boldsymbol{k}$をz方向にとると2つの横偏極の偏りのベクトルは

$$\varepsilon_\mu(\lambda=1)=(0,\ 1,\ 0,\ 0),\qquad \varepsilon_\mu(\lambda=2)=(0,\ 0,\ 1,\ 0) \tag{5.165}$$

である（式(5.23)，(5.24)を参照）．他の2つのεは

$$\varepsilon_\mu(\lambda=0)=(1,\ 0,\ 0,\ 0)\quad \text{“時間偏極”} \tag{5.166}$$

$$\varepsilon_\mu(\lambda=3)=(0,\ 0,\ 0,\ 1)\quad \text{“縦偏極”} \tag{5.167}$$

である．しかし4つのλすべてにわたる“和”を作ると，予期しなかった巧妙な点が効いてくる — $\lambda=0$の寄与は負号を伴うはずである．結果（問題5.6参

照)

$$\varepsilon_\mu(\lambda=1)\varepsilon_\nu(\lambda=1)+\varepsilon_\mu(\lambda=2)\varepsilon_\nu(\lambda=2)+\varepsilon_\mu(\lambda=3)\varepsilon_\nu(\lambda=3)$$
$$-\varepsilon_\mu(\lambda=0)\varepsilon_\nu(\lambda=0)=-g_{\mu\nu} \tag{5.168}$$

から，何か理由を考えることができる．実際，量

$$'\sum_\lambda \varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)'$$

が式(5.168)の左辺を意味し，一般の4項の和ではないとすれば，この結果は共変的な表式 $-g_{\mu\nu}$ になる．これこそまさに探し求めていた項である．

式(5.72) 全体を完全に再構成したことは明らかである．更に，図5.8のほかの部分は5. 2節から既知であるから，あらためて内線光子について次の規則をたてることができる．

(v) 4元運動量 q の内線光子には，因子 $-\mathrm{i}g_{\mu\nu}/q^2$ を対応させる．

この規則および振幅の最後の形式(5.72) は単一図形図5.8に適合している．場の理論的再解釈によって光子の4元運動量 q は $q^2\neq 0$ である．

次のような考察を行うと，“仮想”光子と“実”光子の違いについてある洞察をうることができる．次の形

$$j_{\mathrm{b}}^\mu\cdot -g_{\mu\nu}/q^2\cdot j_{\mathrm{a}}^\nu \tag{5.169}$$

に到達したがここで $q^2\neq 0$，すなわち $q^0\neq|\boldsymbol{q}|$ に対し

$$q=(q^0,\ 0,\ 0,\ |\boldsymbol{q}|) \tag{5.170}$$

である．電流保存の関係は

$$q^0 j^0-|\boldsymbol{q}|\cdot j^3=0 \tag{5.171}$$

すなわち

$$j^3=q^0 j^0/|\boldsymbol{q}| \tag{5.172}$$

である．

式(5.169) は式(5.172) を用いて

$$(j_{\mathrm{b}}^1 j_{\mathrm{a}}^1+j_{\mathrm{b}}^2 j_{\mathrm{a}}^2)/q^2+(j_{\mathrm{b}}^3 j_{\mathrm{a}}^3-j_{\mathrm{b}}^0 j_{\mathrm{a}}^0)/q^2 \tag{5.173}$$
$$=(j_{\mathrm{b}}^1 j_{\mathrm{a}}^1+j_{\mathrm{b}}^2 j_{\mathrm{a}}^2)/q^2+j_{\mathrm{b}}^0 j_{\mathrm{a}}^0/\boldsymbol{q}^2 \tag{5.174}$$

と書くことができる．第1項は横偏極した光子(1, 2成分のみ入って $\boldsymbol{q}$ に垂直)の交換によると解釈される．実光子に対しては $q^2\longrightarrow 0$ だから第1項は完全に第2項を陵駕する．しかし $q^2\neq 0$ の時は第2項を取り入れなくてはならない．第

2項は4元運動量の2乗 q^2 ではなく，3元運動量の2乗 $\boldsymbol{q}^2$ を含み，かつ電荷密度 j_b^0, j_a^0 を含んでいる．本節の最初に戻ると，この項は2つの電荷分布の間の瞬間 Coulomb 相互作用

$$\int d^4x e^{iq\cdot x}\delta(t)/r=\int d^3x e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}/r=4\pi/\boldsymbol{q}^2 \tag{5.175}$$

と解釈することができる．したがってまとめて言えば，図5.8に対応する単一共変振幅 式(5.72)は，横偏極した光子の交換による寄与と，周知の Coulomb ポテンシャルの双方を含む．これが式(5.147)の静的な Coulomb 相互作用の真に相対論的な拡張にあたっている．しかし第13章でこの規則(v)について更に述べるところがあろう．

規則(ｉ)，(ii)，(ｖ)は図5.8の頂点および内線光子に付随すべき因子である．規則(iv)を使うと振幅式(5.72) が再現される．(5．2節の終わりを参照)

5．7　例題：電磁的 $\pi^+\pi^+$ および $\pi^+\pi^-$ 散乱

$\mathscr{H}_{\text{int}}$ の中に含まれているいろいろな頂点をいろいろに“つなぎ合わせて”，光子とスピンを持たない荷電粒子を含む多数のほかの過程の振幅を構成できることは，明らかである．はじめに，粒子が識別不可能な場合に必要となる5．3節の修正について考えよう．一般的に粒子を“a”，“b”とするかわりに，単に π (パイ中間子) と呼ぶ．しかし現実の $\pi\pi$ 散乱では一般に強い相互作用が優勢になって，ここで計算する電磁相互作用をしのいでしまうことを忘れてはならない．

反応は

$$\pi^+(p_1)+\pi^+(p_2)\to\pi^+(p_3)+\pi^+(p_4) \tag{5.176}$$

である．

初めの状態と終わりの状態は同種粒子を含み，したがって適切な対称状態を用いなくてはならない．散乱振幅について言えば，全振幅は初めあるいは終わりの π^+ 粒子を交換しても対称でなくてはならない．Feynman 図形で言えば，前と同じ図5.9で表されるが，このほかに，p_3 と p_4 が交換された図5.10の図形を付け加えなくてはならない．前述の規則を用いると，完全な振幅を次の形に書くことができる．

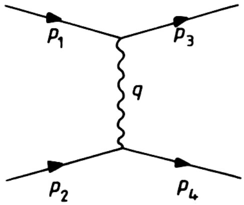


図 5.9 $\pi^+\pi^-$ 散乱の Feynman 図形．1 光子交換の近似で直接過程を記述する．

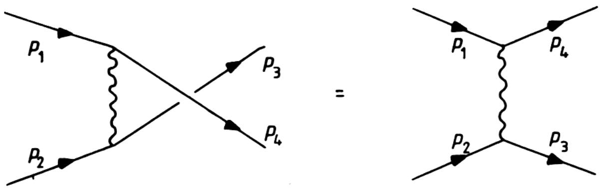


図 5.10 $\pi^+\pi^-$ 散乱の交換過程

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_{\text{direct}}+\mathscr{A}_{\text{exchange}}$$

結果は次のようになる．

$$\mathscr{A}_{\pi^+\pi^+}=-\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)N_1N_3N_2N_4$$
$$\times\left(\frac{-e^2(p_1+p_3)_\mu(p_2+p_4)^\mu}{(p_2-p_4)^2}+\frac{-e^2(p_1+p_4)_\mu(p_2+p_3)^\mu}{(p_2-p_3)^2}\right) \tag{5.177}$$

$$\equiv-\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)N_1N_2N_3N_4F_{\pi^+\pi^+}(p_1,\ p_2\ ;\ p_3,\ p_4) \tag{5.178}$$

ここで $\pi^+\pi^+$ 散乱についての不変 Feynman 振幅 $F_{\pi^+\pi^+}$ を，“標準的”な規格化定数すべてと，運動量の保存の因子を除いて定義した．

次に，$\pi^+\pi^-$ 散乱を考えよう．反粒子の仮説を用いると，対応する図形は図 5.11 である．Feynman 振幅で書けば，これは関係

$$F_{\pi^+\pi^-}(p_a,\ p_b\ ;\ p_c,\ p_d)\equiv F_{\pi^+\pi^+}(p_a,\ -p_d\ ;\ p_c,\ -p_b) \tag{5.179}$$

に対応し，ただちに答を書き下せる．(また同じ結果は，以前にエネルギー保存の因子を出したときと同じく，負エネルギー解を用いて詳細に導き出すこともできる．あるいは $\hat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$ の適当な部分を使ってもよい．) その結果は



図 5.11　$\pi^+\pi^-$ 散乱の Feynman 解釈

$$F_{\pi^+\pi^-}(p_a,\ p_b\ ;\ p_c,\ p_d)=\left(\frac{-e^2(p_a+p_c)_\mu(-p_d-p_b)^\mu}{(-p_d+p_b)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{-e^2(p_a-p_b)_\mu(-p_d+p_c)^\mu}{(p_a+p_b)^2}\right) \tag{5.180}$$

であり，その各項は図 5.12，図 5.13 にそれぞれ対応する．図 5.12 は 5．6 節の a+b 散乱の図形と同じで，$e_a=e$，$e_b=-e$ である．振幅は $\pi^+\pi^+$ 散乱の振幅と符号が異なる．同符号の電荷は反発し，異符号の電荷は引き合うから，これはまさに期待したとおりの結果である．図 5.13 は，新しい過程で，粒子・反粒子が消滅して仮想光子となり，それが再び物質化する物理的過程をあらわす．$\pi^+\pi^+$ 過程における対称化の効果は，“交差した”径路（チャンネル）の $\pi^+\pi^-$ 消

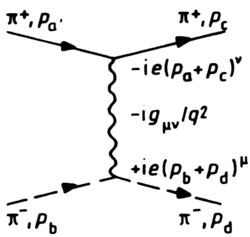


図 5.12　$\pi^+\pi^-$ 散乱の 1 光子交換過程

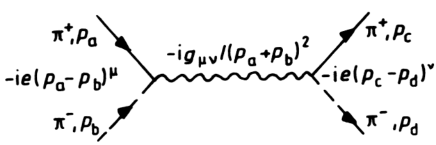


図 5.13　$\pi^+\pi^-$ 散乱の 1 光子消滅過程

滅図形として表われている.

5. 8　パイオンの Compton 散乱：パイオンの伝播関数とゲージ不変性

5. 8. 1　パイオンの伝播関数

いままでは交換される粒子，あるいは図形の言葉で言えば“内線”粒子は光子だけの場合を扱ってきた．しかし図 5.14 に示すように頂点をつけかえることもできる．この図形は π^+ 粒子の Compton 散乱

$$\gamma(k)+\pi^+(p)\to\gamma(k')+\pi^+(p') \tag{5.181}$$

に寄与をする．図 5.14 のすべての部分にどういう因子を書き下すか既知であるが，1 つだけまだわからない．内線あるいは仮想パイオンの因子が未知である．この因子は，仮想光子の因子 $-ig_{\mu\nu}/q^2$ を導いたのと同じ方法，すなわち図 5.14 に含まれる 2 つの異なる過程図 5.15 (*a*) と図 5.15 (*b*) の和を考察することで得られるであろう（問題 5.7 参照）．

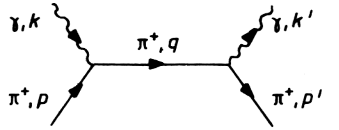


図 5.14　パイオン Compton 散乱の Feynman 図形

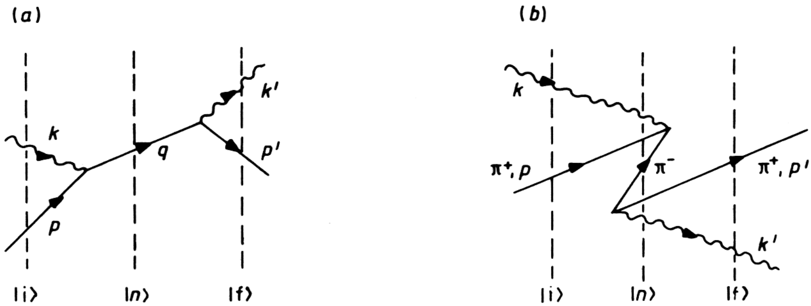


図 5.15　（図 5.8 参照）のただ 1 つの Feynman 図形に対応する 2 つの“非共変”的摂動論の図形（図 5.7 参照）．(*a*)　中間状態 $|n\rangle$ は π^+1 個の状態　(*b*)　5 個の量子（反粒子 π^- を含む）

しかしここでは，光子の場合の類推に頼ってそれとは異なる手法を用いよう．式(5.70)～(5.73)で重要な $1/q^2$ の因子がどこから来たか思い出してみよう．“相互作用をしている” Maxwell の方程式を Lorentz ゲージで書くと

$$\Box A^\mu = j^\mu \tag{5.182}$$

であった．最低次の摂動論では $j^\mu \sim e^{-iq\cdot x}$ であったからこの式を逆転して

$$A^\mu = -(g^{\mu\nu}/q^2)\cdot j_\nu \tag{5.183}$$

とすることができた．2粒子過程では振幅は

$$j_b^\mu(-g_{\mu\nu}/q^2)j_a^\nu \tag{5.184}$$

の形を持っていたから，$-ig_{\mu\nu}/q^2$ を仮想光子の因子と同定した．まったく同じ段階を相互作用するパイオンにあてはめてみよう．この場合，対応する方程式は

$$(\Box + m^2)\phi = -V\phi = -j \tag{5.185}$$

であり，平面波の“カレント” $j \sim e^{iqx}$ に対して上の式を逆転すれば

$$\phi = \frac{1}{q^2 - m^2} j \tag{5.186}$$

である．式(5.183) と式(5.186) を比較して次の規則が成り立つと考える．

(vi)　4元運動量 q のスピンを持たない内線粒子には因子 $i/(q^2 - m^2)$ を与える．

内線粒子に与える因子を伝播関数という．これは重要な術語である．予測(vi)はパイオンの伝播関数の正しい解である．より厳密な導き方は，Bjorken-Drell (1964)の第6章を参照せられんことを強く推奨する．そこには非相対論的および相対論的な伝播関数の理論が展開されている．また伝播関数はしかるべき自由粒子の方程式の Green 関数の運動量表示であり，正エネルギーおよび負エネルギーの解に対する Feynman の処方は，運動量空間における伝播関数の極を処理するいわゆる“$+i\varepsilon$ 処法”に対応することも，そこで論じられている．

5.8.2　パイオンの交換と Yukawa ポテンシャル

$\gamma\pi$ の散乱の計算に入る前に，パイオンの伝播関数の形について極めて簡単ではあるが基本的な解釈を論じておこう．伝播関数は本質的に内線すなわち交換されるパイオンに対応する振幅の部分である．光子の交換は，光子を交換する

粒子間の電磁力を記述する場の理論的方法であることはすでに学んだ．そのうえ，力の法則の性質 ($1/r$ ポテンシャル) と光子の伝播関数の形の間にも密接な関係がある．式(5.143)～(5.147) を比較し，静的なポテンシャルに対しては $E_i = E_f$ であるから，$q^2=(E_f-E_i)^2-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2=-\boldsymbol{q}^2$ となることに注意せよ．したがって次の質問はまったく自然である：2 つの粒子がパイオンを交換して，相互作用をしているならば，どんな静的なポテンシャルがそれに対応するであろうか．

答えは式(5.146) から得られる．表式 $(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)^{-1}$ は因子 $-\mathrm{i}$ を別にしてまさに，質量 μ のスピン 0 の粒子が静的な場合 $q^2=-\boldsymbol{q}^2$ でとる伝播関数である．振幅 式(5.146) は，Yukawa 型のポテンシャル

$$V \propto \mathrm{e}^{-\mu r}/r \tag{5.187}$$

に対応することを示す．式(5.187) でポテンシャルの有効距離は μ^{-1} (完全な単位で書けば $\hbar/\mu c$) である．この距離を超えると V は急激に小さくなって無視できる．ここで μ は交換される量子の質量である．したがって，質量 μ の量子の交換は有効距離 μ^{-1} の力を生ずる．この基本的な関係を用いて Yukawa (1935) (また Wick (1938) を参照) は短距離力 (約 1 ～ 2 fm) の核子・核子ポテンシャルを生ずべき当時としては仮説に過ぎなかった粒子の質量を評価したのであった．有効距離 1 fm に対しては $\mu \sim 200$ MeV で，現実のパイオンの質量に非常に近い．実際，パイオンの交換は核力の長距離部分のよい記述を与えるのは本当である．$\mu \to 0$ に近迫させると再び Coulomb ポテンシャルを再現するが，これは指数関数的に減衰する因子を持たないので“有効距離無限大”と言われる．

5．8．3　パイオンの Compton 散乱とゲージ不変性

$\gamma\pi$ 散乱に戻って，図 5.14 の Feynman 図形(図 5.15 (a) と図 5.15 (b) を含む)の寄与を計算するためのすべての要素は集結ずみである．外線光子と内線パイオンの各因子を集めて，不変振幅は

$$F_{\gamma\pi}^{(\mathrm{d})} = e^2 \varepsilon'^* \cdot (q+p')[1/(q^2-m^2)]\varepsilon \cdot (q+p) \tag{5.188}$$

である．式 (5.73) 同様規格化と δ 関数の因子は分離しておく．仮想パイオンの 4 元運動量は

$$q = k + p = k' + p' \tag{5.189}$$

である．Lorentz 条件

$$\varepsilon\cdot k=\varepsilon'\cdot k' \tag{5.190}$$

を課し，

$$s=(k+p)^2=(k'+p')^2 \tag{5.191}$$

を定義すれば振幅 式(5.188) は

$$F_{\gamma\pi}^{(\mathrm{d})}=4e^2(\varepsilon^*\cdot p')(\varepsilon\cdot p)/(s-m^2) \tag{5.192}$$

と書くことができよう．添字(d)は“直接 (direct) 過程”の意味で，振幅はこれだけではないことを示唆する．図5.14の図形を“交差した”過程 $\pi^+\pi^-\to\gamma\gamma$ を記述すると考えよう．終わりの状態には2つの同等なボソンが存在するから，2光子状態を対称化しなくてはならない．これは図5.16の図形を考えることになり，これもまた $\gamma\pi\to\gamma\pi$ 過程に寄与をするはずである．Compton 散乱に対しては，対応する図形は図5.17のようになる．前の方法に従って，この図形の不変振幅は

$$F_{\gamma\pi}^{(\mathrm{e})}=e^2\varepsilon'^*\cdot(p+q')[1/(q'^2-m^2)]\varepsilon\cdot(q'+p') \tag{5.193}$$

である．ここで

$$q'=p-k'=p'-k \tag{5.194}$$

である．Lorentz 条件および Mandelstam 変数

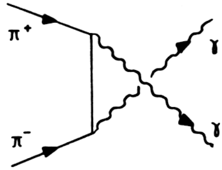


図5.16　$\pi^+\pi^-\to\gamma\gamma$ における交換過程の寄与

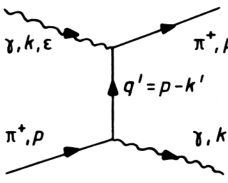


図5.17　$\gamma\pi^+\to\gamma\pi^+$ における交換過程の寄与

$$u = q'^2 = (p-k')^2 = (k-p')^2 \tag{5.195}$$

を用いると振幅は

$$F_{\gamma\pi}^{(e)} = 4e^2(\varepsilon^* \cdot p)(\varepsilon \cdot p')/(u-m^2) \tag{5.196}$$

と書ける．この振幅は直接項（あるいは s チャンネル）$F_{\gamma\pi}^{(d)}$ に対して，交換(exchange) 項（あるいは u チャンネル）の寄与と呼ばれることがある．

ここまでパイオン Compton 散乱の e^2 の桁の寄与はすべて求められた，と見えるかもしれない．しかし，実はそうではない．式(5.1)の中の KG ポテンシャル $\hat{V}_{KG}$ の中の忘れていた項

$$-e^2 A^2 \tag{5.197}$$

も，この過程に寄与するのである．場の理論の言葉で言えば，式(5.197)は，式(5.36) を書いたときに省略してしまった式(4.195) の一部にあたる．すなわち $\hat{\mathscr{H}}_{\text{int}}$ の中の省略した項

$$-e^2 \hat{A}^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \tag{5.198}$$

に対応する．式(5.198)は新しい頂点を与える．パイオン Compton 散乱について言えば，図 5.18 に示すように，式(5.198) は 4 つの量子（2 つの光子と 2 つの中間子）が一点で相互作用する過程を表す．中間状態が含まれていないのでこれを“接触 (contact)”項という．この図形に対する振幅に，場の量の展開と演算子の代数を用いて，行列要素

$$-e^2 \langle p' ; k', \ \varepsilon' | \hat{A}^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} | p ; k, \ \varepsilon \rangle \tag{5.199}$$

を計算すれば，第一原理から求めることができる．ここではそうしないで，やや間接的ではあるが，全振幅のゲージ不変性を強調するような方法によって求めてみよう．

図 5.19 の図形に示されている過程を考える．光子の運動量は k''，偏極状態は

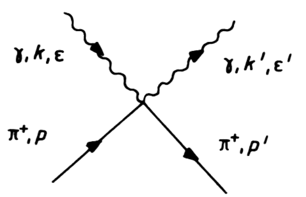


図 5.18 $\gamma\pi^+ \to \gamma\pi^+$ における 4 点接触項

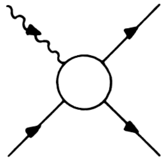


図 5.19　一般的な 1 光子過程

偏極ベクトル ε^μ で記述されるとする．この過程の振幅は光子の偏極ベクトルに比例するはずであるから

$$\mathscr{A}=\varepsilon^\mu T_\mu \tag{5.200}$$

と書ける．T_μ は特定の過程による．Lorentz ゲージのもとの ε^μ の選び方では

$$k\cdot\varepsilon=0 \tag{5.201}$$

が成り立つ．しかし 5．1 節で見たように，実光子に対するゲージ不変性によれば，ε^μ を次の ε'^μ で置き換えても物理量は何の変化も受けない．

$$\varepsilon'^\mu=\varepsilon^\mu+\beta k^\mu \tag{5.202}$$

何となればこの変換は，Lorentz ゲージの枠内でゲージを変えることに過ぎないからである．振幅 $\mathscr{A}$ に対してゲージ不変性の要求は条件

$$\boxed{k^\mu T_\mu=0 \quad \text{ゲージ不変性}} \tag{5.203}$$

に帰する．ゲージ不変性のこの検証を式 (5.192) と式 (5.196) の和に対して行ってみよう．

$$F_{\gamma\pi}^{(\mathrm{d})}+F_{\gamma\pi}^{(\mathrm{e})}=4e^2\varepsilon'^{\mu*}\varepsilon^\nu\left(\frac{p'_\mu p_\nu}{s-m^2}+\frac{p_\mu p'_\nu}{u-m^2}\right) \tag{5.204}$$

$$\equiv\varepsilon'^{\mu*}\varepsilon^\nu T_{\mu\nu} \tag{5.205}$$

ここで ε を k に置き換え関係式

$$2p\cdot k=s-m^2 \tag{5.206}$$

$$2p'\cdot k=-(u-m^2) \tag{5.207}$$

を用いると

$$\varepsilon'^{\mu*}k^\nu T_{\mu\nu}=2e^2\varepsilon'^{\mu*}(p'-p)_\mu \tag{5.208}$$

$$=2e^2\varepsilon'^*\cdot k \tag{5.209}$$

が得られ，これは 0 にならない．また ε' を k' で置き換えると

$$2e^2k'\cdot k \tag{5.210}$$

が残り，これも 0 にならない．したがってこれまでに考えた 2 つの振幅では完全な振幅にはなり得ないことがわかる．完全なそれぞれの光子に対してゲージ不変性の条件式(5.203) を満たさなくてはならないからである．

さてこの時点で，われわれは e^2 を展開のパラメーターとする（より正確に言えば無次元量 $\alpha=e^2/4\pi$）摂動計算を行っているのだ，ということを思い出さなくてはならない．条件式(5.203) はもちろん全振幅について成り立つものであり，一方 $F^{(\mathrm{d})}_{\gamma\pi}+F^{(\mathrm{e})}_{\gamma\pi}$ は e^2 の桁の寄与にすぎない．しかしながら，摂動展開の高次の項が 2 次の項のゲージ不変性を回復してくれるとは，とても考えられない．原理的に e^2 は任意のパラメーターだからである．むしろ，式(5.203) は摂動論のそれぞれの次数で成り立つ，と期待すべきである．したがって $F^{(\mathrm{d})}_{\gamma\pi}+F^{(\mathrm{e})}_{\gamma\pi}$ に振幅

$$F^{(\mathrm{c})}_{\gamma\pi}=-2e^2\varepsilon'^*\cdot\varepsilon \tag{5.211}$$

を加える必要がある，と考えなくてはならない．とすれば全振幅

$$F^{(\mathrm{d})}_{\gamma\pi}+F^{(\mathrm{e})}_{\gamma\pi}+F^{(\mathrm{c})}_{\gamma\pi} \tag{5.212}$$

は e^2 の桁（次数）においてゲージ不変性の条件を満足する．したがって，相互作用のポテンシャルの中からたとえ e^2A^2 の項を除いてしまったとしても，ゲージ不変性と矛盾しないためには，この項の存在が必要である．条件式(5.203) は，実際の計算ではきわめて有用な検算法である．式(5.211) はもちろん，式(5.197) あるいは式(5.198) の対応する部分を計算して得られる結果である．因子 2 は，$\hat{A}^2$ 項の中のそれぞれの $\hat{A}$ が光子の放出および吸収に関与している事実から出てきたものである．

したがってパイオン Compton 散乱の（e^2 の桁の）全不変振幅は

$$F_{\gamma\pi}=e^2\varepsilon'^{\mu *}\varepsilon^{\nu}\left(\frac{4p'_\mu p_\nu}{s-m^2}+\frac{4p_\mu p'_\nu}{u-m^2}-2g_{\mu\nu}\right) \tag{5.213}$$

である．断面積を計算するために用いられる完全な振幅は，これにいつもの規格化と δ 関数の因子を乗じて得られる．

5．9　枝線図形と閉線図形：高次の計算

今まで扱ってきた例題の計算には，共通して1つの重要な特徴がある．(不変な)Feynman 図形の形で考えるとき，中間状態 $|n\rangle$ はすべて単一粒子状態，例えば光子1個かパイオン1個状態である．このような状態に対しては，方程式(5.159)からあからさまに見られるとおり，図形の各頂点で成立する運動量保存則(δ 関数)から運動量が1つに決まってしまう．このことは，中間状態の運動量に関する積分 $\int d^3\boldsymbol{k}$ を δ 関数を用いて行うことができ，すでにみたように積分が1つも残らない，ということを意味する．しかし，例えば図5.6で捨てた図形を考えてみよう．図5.20に興味ある部分を再録してある．“非共変的”な記法ではこの項はたくさんの寄与を含む．図5.21に示したのはそのうちの1つである．中間状態の和は，その他の因子のほかの積分

$$\iint d^3\boldsymbol{p}' d^3\boldsymbol{k}\,\delta^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})\,\delta^3(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_2)\cdots \tag{5.214}$$

を含む．この式の積分のうち1つはすぐできて，例えば

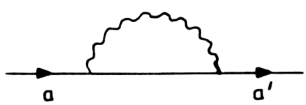


図5.20　1光子を放出し再吸収する過程の Feynman 図形

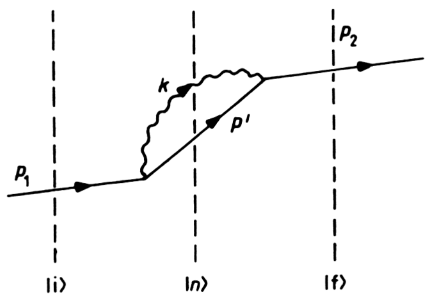


図5.21　図5.20の過程に寄与する1つの“非共変”の過程

$$\delta^3(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdots \tag{5.215}$$

となる．明らかに光子の運動量を決定する制限はない．光子は放出されると必ず同じ粒子に吸収され，全体としての運動量保存が式(5.215) の中に表れている．

もちろん，これは“非共変的”な議論である．しかし，共変的な Feynman 図形についても,適当な一般化が成り立つと考えることは非常にもっともらしい．すなわち，各頂点でエネルギーと運動量の保存によっては決まらない中間状態での粒子の 4 元運動量については，すべて積分しなくてはならない．図 5.22 にその一例をあげておいた．これは過程 $1+2\to3+4$ の振幅に α^2 の桁で寄与する高次の過程である．4 元運動量 k は決定されないことは明らかで，したがって正しいやり方は

(vii) 決定されない任意の 4 元運動量 k については因子 $\int \mathrm{d}^4k/(2\pi)^4$ を付して積分する

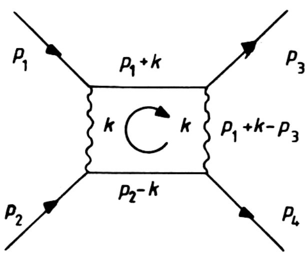


図 5.22 2 光子交換の Feynman 図形

ことである．図 5.20，5.22 のような図形を 1 閉線(1 ループ)図形という．2 閉線（2 ループ）図形のひとつを図 5.23 に示す．1 閉線の図 5.22 のように，一般に，独立な閉線運動量がいくつかあればそのすべてについて積分しなくてはならない．

好奇心のある読者は，例えば図 5.20 の不変振幅を書き下してみようとするかもしれない．書き下して積分を実行しようとするとやっかいなことに気がつい

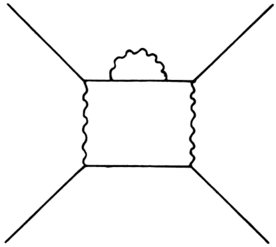


図5.23　2つの閉線を持つFeynman図形

てびっくりする．積分は無限大になる．(このような発散積分の一例は次の章の問題6.13にある．) 図5.22の図形についてもそうであるし，まずいことに大部分の閉線図形についてそうである．これは極めて不愉快な事情である．図5.22は図5.9の最低次の振幅に対する小さな(α^2の桁の)補正であるべきなのに，実際は，無限大になってしまう．このような無限大との長期間にわたる悪戦苦闘の末，摂動展開から物理的に意味のある結果をどのようにして得られるかわかってきた．すなわちαの高次の図形の寄与が低次の寄与より実際に小さいことを保証することがわかってきた．これらの無限大を操縦し"飼い慣らす"正確な段取りを，摂動の"繰り込み (再規格化)"という．あらゆる無限大が奇跡的に粒子の物理的質量や物理的電荷の中にさらいこまれてしまうので"繰り込み"という．(形式的には発散する) これらの量は繰り込んだ後，有限なその物理量の数値で置き換えられる．詳しい議論は第6章まで預けておく．しかし，"枝線"図形 (ループなし) と"閉線"図形 (1つ以上のループあり) との有用な違いを注意しておく．電磁相互作用や弱い相互作用のように，物理的な結合定数が小さい理論では，枝線図形の計算は一般に実験と比較しうるよい近似になっている．さらに，枝線図形の範囲では，繰り込みの微妙な諸点は入ってこない．したがって多くの場合，ただ枝線図形を計算する方法がわかれば十分である．これが本書の意図するところである．

さて，ここで電子と光子に対するFeynmanの規則を導くことに転じよう．これはこの章で考察したスピン0の場合より，物理的にずっと興味ある例題である．必要な概念はすでに展開してあるので，スピンによる (かなりの) 複雑さだけが新しいものである．

まとめ

(1) 波動力学の定式化による1次の摂動論：スピン0の粒子による1個の光子の吸収.

(2) 場の量子論の定式化による諸振幅の基礎づけ.

(3) 2つのスピン0荷電粒子の電磁散乱に対する振幅の導出とそれに付随した Feynman 図形，最低次の発見法的議論.

(4) 2体の相体積を含む断面積のあからさまな計算.

(5) 場の量子論による2体の振幅の再導出.

(6) 光子の交換による解釈.

(7) 共変 Feynman 図形と“質量殻をはずれた”粒子.

(8) Feynman 図形に一緒に含まれる横光子の交換と瞬間的 Coulomb 相互作用.

(9) 区別できない粒子の散乱，“交差”チャンネル.

(10) スピン0粒子の伝播関数.

(11) パイオンの交換と Yukawa ポテンシャル.

(12) パイオンの Compton 散乱，ゲージ不変性が相互作用の形をきめる一例.

(13) 高次過程の計算についての付言と枝線図形・閉線図形の違い.

問題

5. 1 次の形の行列要素を考える

$$M=\int d^3x\int dt\, e^{+ip_f\cdot x}\partial_\mu A^\mu e^{-ip_i\cdot x} \tag{5.1.1}$$

積分は全時空間にわたり，かつ

$$A^0\to 0 \quad t\to\pm\infty \text{ の時に}$$
$$|\boldsymbol{A}|\to 0 \quad |\boldsymbol{x}|\to\infty \text{ の時に}$$

であると仮定すれば

(a) $$\int dt\, e^{+ip_f\cdot x}\partial_0 A^0 e^{-ip_i\cdot x}=(-ip_{f0})\int dt\, e^{+ip_f\cdot x}A^0 e^{-ip_i\cdot x} \tag{5.1.2}$$

(b) $$\int d^3x\, e^{+ip_f\cdot x}\nabla\cdot\boldsymbol{A}e^{-ip_i\cdot x}=i\boldsymbol{p}_f\cdot\left(\int d^3x\, e^{+ip_f\cdot x}\boldsymbol{A}e^{-ip_i\cdot x}\right) \tag{5.1.3}$$

が成り立つことを示せ．これから次式を証明せよ．

$$\int d^3x \int dt e^{+ip_f\cdot x}(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) e^{-ip_i\cdot x} = -i(p_f + p_i)_\mu \int d^3x \int dt e^{+ip_f\cdot x} A^\mu e^{-ip_i\cdot x} \tag{5.1.4}$$

5. 2　振幅式(5.59) を証明せよ．

5. 3　粒子 "a"，"b" の電磁散乱の最低次の振幅は 5. 3 節で計算されている．$\bar{a}$ 状態 (反粒子) は負の 4 元運動量を持つ a 状態 (粒子) であるという Feynman の解釈を用いて，$\bar{a}b$ 散乱の対応する行列要素を計算せよ．対応する Feynman 図形に必要な因子をすべて示せ．

5. 4　(a)　重心系および実験室系のいずれにおいても，入射フラックスは次の式を満たすことを示せ．

$$4E_1E_2|\boldsymbol{v}| = 4[(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2} \tag{5.4.1}$$

(b)　変数 $s=(p_1+p_2)^2$ を導入して

$$4[(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2] = [s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2] \tag{5.4.2}$$

が成り立つことを示せ．

(c)　問題 5.3 の電磁的弾性 $\bar{a}b$ 散乱の微分断面積を算出せよ．結果を重心系の変数 E_1，E_2，p および θ_{CM} を用いて表せ．

5. 5　式(5.145)の積分を次の手順で計算せよ．まず，$\boldsymbol{q}$ は積分には関与しない固定ベクトルだから，これを座標空間の z 軸にとると，θ は座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固定ベクトル $\boldsymbol{q}$ の間の角として $\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}) = \exp(i|\boldsymbol{q}|r\cos\theta)$ である．$d\Omega = \sin\theta\, d\theta d\phi$ だが被積分関数は方位角 ϕ を含まないから，ϕ 積分を行えば 2π を得る．θ 積分も $\sin\theta d\theta = -d(\cos\theta)$ を用いれば遂行できる．最後に r 積分を行って，結果

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{1}{r} e^{-\mu r} r^2 dr d\Omega = 4\pi/(\boldsymbol{q}^2 + \mu^2)$$

を導け．

5. 6　関係式(5.168) を証明せよ．

5. 7　図 5.15 に示す 2 つの過程を考えよう．ただし簡単にするため "光子" のスピンは 0 と仮定して，各頂点における因子 $\varepsilon\cdot(p_i+p_f)$ はすべて 1 とおく．こ

れら 2 つの過程の振幅を書き下し，式(5.162) の類推は

$$\frac{1}{2E_n}\left\{\frac{1}{E_k+E_p-E_n}-\frac{1}{E_k+E_p+E_n}\right\}=\frac{1}{(E_k+E_p)^2-E_n^2}$$

になることを示せ．ここに $E_n^2=m^2+\boldsymbol{p}_n^2=m^2+(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2$ である．したがって光子の因子 $1/q^2$ は $1/(q^2-m^2)$ で置き換えられることを示せ．ただし q は，図 5.14 の単一 Feynman 図形において質量殻をはずれた内線パイオンの 4 元運動量 $q=(k+p)$ である．

第6章　スピン1/2の粒子の電磁相互作用

6. 1　1次の摂動論

KG 粒子の場合とまったく同じ方法で摂動論を展開する．しかるべきポテンシャルは 3．6 節で与えられており，電荷 $e\,(e>0)$ の粒子に対して

$$\hat{V}_{\rm D}=eA^0\mathbf{1}-e\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A}=e\begin{pmatrix} A^0 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} & A^0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

であった．このポテンシャルは 4 行 4 列の行列で，１つの複素数としての振幅を得るためには $\psi_{\rm f}^*$（複素共役）のかわりに $\psi_{\rm f}^\dagger$（エルミート共役）を用いなくてはならない．したがって 1 次の振幅（図 6.1 を参照）は

$$\mathscr{A}=-{\rm i}\int {\rm d}^4x\,\psi_{\rm f}^\dagger(k',\ s')\hat{V}_{\rm D}\psi_{\rm i}(k,\ s)\ \text{（1 次）} \tag{6.2}$$

で与えられ，s, s' はスピン成分を指定する．相互作用によってスピンの配位が変わるかもしれないから，スピン成分を指定することが必要である．電磁ポテンシャル A^μ を用いて書けば行列の積は

$$\psi_{\rm f}^\dagger\hat{V}_{\rm D}\psi_{\rm i}=e\psi_{\rm f}^\dagger(A^0\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A})\psi_{\rm i} \tag{6.3}$$

となるが，行列要素の Lorentz 変換に対する性格（例えば 4 元スカラーとか 4 元ベクトルとか）は明確でない．相互作用の Lorentz 変換性を明示するには，もとの $\boldsymbol{\alpha}$, β 行列にかわって“γ 行列”を用いると便利である．γ 行列は

$$\begin{aligned} &\gamma^0=\beta, && (\gamma^0)^2=\mathbf{1} \\ &\gamma^i=\beta\alpha_i, && (\gamma^i)^2=-\mathbf{1}, \qquad i=1,\ 2,\ 3 \end{aligned} \tag{6.4}$$

で定義される．Dirac 方程式に左から β を乗ずると γ 行列を用いて書くことができる．その結果は簡潔で美しい形

$$({\rm i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0 \tag{6.5}$$

をとる（問題 3．4 参照）．ここに $\partial_\mu=(\partial_0,\ \nabla)$ より

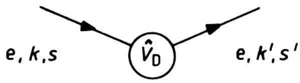


図6.1　ポテンシャル V_D による1次の散乱

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial/\partial t + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \tag{6.6}$$

である．$\boldsymbol{\alpha}$, β の反可換関係式は γ を用いて簡潔な表現

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{6.7}$$

となる．γ^μ と4元ベクトルとの積が頻繁に必要になるので特別な記法

$$\gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{a} \equiv \not{a} \tag{6.8}$$

を用いる．これを"a-スラッシュ"と読む．すると Dirac 方程式はなおも"簡単"な（凝縮した）形を取り

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi = 0 \tag{6.9}$$

となる．$\psi^\dagger$, ψ を含む行列の積の Lorentz 変換性を明らかにするため，

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \tag{6.10}$$

で定義する"ψ-バー"を最後に導入する（問題3．4(b)参照）．例えば，Dirac の確率の流れ

$$\rho = \psi^\dagger \psi \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi \tag{6.12}$$

を考えよう．これらは第3章で見たように保存則

$$\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{6.13}$$

を満たす．この保存則は共変的（すべての座標系で成り立つこと）であって欲しいし，また

$$\partial^\mu = (\partial/\partial t,\ -\nabla) \tag{6.14}$$

は4元ベクトルとして変換するから，$\psi^\dagger \psi$ は不変ではなく4元ベクトルの"0"成分である．γ 行列記法の利点は，ψ と γ 行列の積の Lorentz 変換性を簡潔に表現することである．これは Pauli スピノールの記法 $\chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi$（付録A参照）の4次元的拡張である．

γ 行列の記法では確率密度は

$$\rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi \tag{6.15}$$

確率のカレントは

$$\boldsymbol{j}=\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi \tag{6.16}$$

である．これらは 4 元カレント

$$j^{\mu}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{6.17}$$

に自然と結びついており，保存則

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0 \tag{6.18}$$

の共変性は明らかである．実際 Lorentz 不変であるのは $\psi^{\dagger}\psi$ ではなく $\bar{\psi}\psi$ であり，$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ は 4 元ベクトルであることを型式的に証明することができる (Bjorken-Drell，1964，第 2 章，Aitchison，1972，11．2 節)．

相互作用の行列要素に戻り，これを 4 元ベクトルの記法で書き直すことができる．

$$\psi_{\rm f}^{\dagger}\hat{V}_{\rm D}\psi_{\rm i}=e\psi_{\rm f}^{\dagger}(A^{0}\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A})\psi_{\rm i} \tag{6.19}$$

$$=e\bar{\psi}_{\rm f}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi_{\rm i} \tag{6.20}$$

$$=e\bar{\psi}_{\rm f}\not{A}\psi_{\rm i} \tag{6.21}$$

したがって遷移振幅をカレントが A^{μ} と相互作用する形

$$\mathscr{A}=-{\rm i}\int {\rm d}^{4}x\bar{\psi}_{\rm f}(e\gamma^{\mu}A_{\mu})\psi_{\rm i} \tag{6.22}$$

$$=-{\rm i}\int {\rm d}^{4}x j_{\rm fi}^{\mu}A_{\mu} \tag{6.23}$$

に書くことができよう．ここでフェルミ粒子の電磁遷移カレントを

$$j_{\rm fi}^{\mu}=e\bar{\psi}_{\rm f}\gamma^{\mu}\psi_{\rm i} \tag{6.24}$$

で定義した．これは 5．1 節に導入したボソンのカレントと対応する．ボソンの場合と同じく，フェルミオンの簡単な平面波に対しては

$$j_{\rm fi}^{\mu}=\langle k',\ s'|\,\hat{j}_{\rm em}^{\mu}\,|k,\ s\rangle \tag{6.25}$$

と書け，電荷 e の粒子に対してはフェルミオン・カレントの場の演算子は

$$\hat{j}_{\rm em}^{\mu}=e\bar{\hat{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi} \tag{6.26}$$

で与えられること（4．6 節参照）を容易に確めることができる．さしあたり，場の理論から必要とするものはこれだけである．ここでいつものように，最低次の振幅を計算するために平面波の解を挿入することができる．その前に，Dirac の平面波とスピノールの規格化について注意深く考察しておこう．

6. 2　Dirac スピノールの規格化

平面波の正エネルギー状態

$$\psi^{1,2}=N\omega^{1,2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \tag{6.27}$$

を考えよう．これをどのようにして規格化すべきであろうか．KG 粒子に対しては，体積 V の箱の中に $2E$ 個の粒子が含まれるように規格化した．

$$\int_V \rho \mathrm{d}^3x=2E \tag{6.28}$$

ここで ρ は確率密度である．スピン 1/2 の Dirac 粒子に対しても同じ規約に従おう．$\omega^{1,2}$ のあからさまな形

$$\omega^{1,2}=\begin{pmatrix} \phi^{1,2} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^{1,2} \end{pmatrix} \tag{6.29}$$

および定義

$$\rho=\psi^\dagger\psi \tag{6.30}$$

を用いれば（問題 6．1 参照），

$$N=V^{-1/2}(E+m)^{1/2} \tag{6.31}$$

の結果をうる．正エネルギーのスピノールを，因子 $(E+m)^{1/2}$ を含んで定義するのが便利である．すなわちスピノール $u(p,\ s)$ を

$$u(p,\ s)=(E+m)^{1/2}\begin{pmatrix} \phi^s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^s \end{pmatrix},\qquad s=1,\ 2 \tag{6.32}$$

で定義する．同様に，負エネルギーのスピノール $v(p,\ s)$ を $\omega^{3,4}$ より

$$v(p,\ s)=(E+m)^{1/2}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix},\qquad s=1,\ 2 \tag{6.33}$$

で定義する．スピノール $v(p,\ s)$ は，その中に現れる E，$\boldsymbol{p}$ および $s=1,\ 2$ が物理的な陽電子のエネルギー（正の値をとる），運動量およびスピン射影（↑または↓）を表している．これを納得することがきわめて重要である．

これらのスピノールは

$$u^\dagger u=v^\dagger v=2E \tag{6.34}$$

を満たすこと(問題3. 5参照), および運動量空間で書いた Dirac 方程式は, u, および v についてそれぞれ

$$(\not{p}-m)u=0 \tag{6.35a}$$

$$(\not{p}+m)v=0 \tag{6.35b}$$

であることはすぐわかる (問題6. 1参照). $\bar{\psi}$ に対応して次の量

$$\bar{u}\equiv u^{\dagger}\gamma^{0} \tag{6.36a}$$

$$\bar{v}\equiv v^{\dagger}\gamma^{0} \tag{6.36b}$$

を定義すると便利である. 規格化

$$\bar{u}u=2m \tag{6.37a}$$

$$\bar{v}v=-2m \tag{6.37b}$$

が成り立つこと, および $\bar{u}$, $\bar{v}$ が次の共役 Dirac 方程式

$$\bar{u}(\not{p}-m)=0 \tag{6.38a}$$

$$\bar{v}(\not{p}+m)=0 \tag{6.38b}$$

を満たすことも, ただちに証明される (問題6. 1参照).

規約についての注意をここでまとめて述べておく. 本書に用いた規格化は, いわゆる共変規格化であって, スピノール u と v もそれにみあうように定義した†. ここの u, v の定義は, Bjorken-Drell (1964) や Aitchison (1972) で定義された u, v と因子 $(1/2m)^{1/2}$ だけ異なっている. さらに, これらの教科書では ψ に非共変的な規格化を用い, それに応じて相空間とフラックスの因子を変更している. もちろん, 最終結果の断面積は, 規格化の規約いかんにかかわらず一致する.

われわれの規約に従えば, 正エネルギーおよび負エネルギーの平面波解は

$$\psi(\mathrm{e}^{-})=V^{-1/2}u(p,\ s)\mathrm{e}^{-ip\cdot x} \tag{6.39}$$

$$\psi(\mathrm{e}^{+})=V^{-1/2}v(p,\ s)\mathrm{e}^{+ip\cdot x} \tag{6.40}$$

である (e^{-} は“粒子”であるから). $V^{-1/2}$ は KG粒子の場合と同様, いつもの

†(訳注)　ニュートリノのように静止質量が0である Dirac 粒子に対しては形式的な不備が残るが, 0 でない静止質量を規格化定数の中に残しておいても, 物理的に意味のある量を算出するときには, おのずから消去されて実際上はなんの困難も生じない. 光子を質量をもつベクトル粒子から切り離して論じたように, 正確には質量を持たない Dirac 粒子は別個に定式化すればよい.

箱の中の平面波の規格化因子である．たとえば，正エネルギーの電子に対して，遷移電磁カレント

$$j^{\mu}(e^-)=(-e)\bar{\psi}_f\gamma^{\mu}\psi_i \tag{6.41}$$

はまさに

$$j^{\mu}(e^-)=(-e)\mathscr{N}_f\mathscr{N}_i\,\bar{u}_f\gamma^{\mu}u_i e^{+i(k'-k)\cdot x} \tag{6.42}$$

である．ここでスピノールは

$$\bar{u}_f\equiv\bar{u}(k',\ s'),\qquad u_i\equiv u(k,\ s) \tag{6.43}$$

であり，フェルミ粒子に対する規格化因子は$\mathscr{N}$で表され

$$\mathscr{N}_f=\mathscr{N}_i=V^{-1/2}$$

である．われわれの規約では$\mathscr{N}$はボソンのNと同じであるが，ほかの教科書の規約では必ずしも同一ではない．

6. 3　π^+e^- 弾性散乱

さてとうとう，実験ではかることのできる断面積を計算する手はずが整った．π^+e^-の弾性散乱を考えよう．図6.2には4元運動量とスピンの記号が書きこんである．“a+b”散乱で行ったように，問題を2段階に分けて取り扱う．ポテンシャルA^{μ}による電子散乱の振幅は

$$\mathscr{A}=-i\int d^4x j_{\mu}(e^-)A^{\mu} \tag{6.44}$$

で，電子の遷移電磁カレントは†

$$j_{\mu}(e^-)=(-e)\mathscr{N}\mathscr{N}'\bar{u}(k',\ s')\gamma_{\mu}u(k,\ s)e^{+i(k'-k)\cdot x} \tag{6.45}$$

であることはすでに知っている．A^{μ}として，荷電パイオンの運動によって作ら

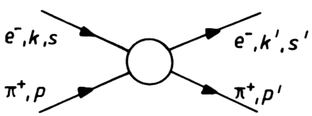


図 6.2　$e^-\pi^+$ 散乱の振幅

† (原注)　γ_{μ}は$\gamma_{\mu}=g_{\mu\nu}\gamma^{\nu}$で定義する．付録A.2の式(A.64)を参照．したがって$\gamma_{\mu}A^{\mu}=g_{\mu\nu}\gamma^{\nu}A^{\mu}=\gamma^{\nu}g_{\mu\nu}A^{\mu}=\gamma^{\nu}A_{\nu}$

れる電磁ポテンシャルが必要である．以前の“a+b”散乱の計算では，それは

$$A^{\mu}=-q^{-2}j^{\mu}(\pi^{+}) \tag{6.46}$$

で与えられ（式(5.69) 参照），パイオンの遷移電磁カレントは

$$j^{\mu}(\pi^{+})=eNN'(p+p')^{\mu}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(p'-p)\cdot x} \tag{6.47}$$

と書かれた（式(5.59) 参照）．いつものように4元運動量移行は

$$q=p'-p=k-k' \tag{6.48}$$

で定義されていた．これにならって，$\pi^{+}\mathrm{e}^{-}$ 散乱の最低次の振幅は

$$\mathscr{A}_{\mathrm{e}\pi}=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x j_{\mu}(\mathrm{e}^{-})\left(-\frac{1}{q^{2}}\right)j^{\mu}(\pi^{+}) \tag{6.49}$$

と書くことができるであろう．すべての量をあからさまに書けば

$$\mathscr{A}_{\mathrm{e}\pi}=-\mathrm{i}\mathscr{N}\mathscr{N}'NN'\int \mathrm{d}^{4}x[\bar{u}(k',\ s')\gamma_{\mu}u(k,\ s)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(k'-k)\cdot x}]$$
$$\times(+e^{2}/q^{2})[(p+p')^{\mu}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(p'-p)\cdot x}] \tag{6.50}$$

を得る．$\mathrm{d}^{4}x$ に関する積分は遂行できて，予想していたごとく4元運動量の保存則を表す δ 関数が得られる．

$$\mathscr{A}_{\mathrm{e}\pi}=-\mathrm{i}\mathscr{N}\mathscr{N}'NN'(2\pi)^{4}\delta^{4}(k'+p'-k-p)$$
$$\times(-e)\bar{u}(k',\ s')\gamma_{\mu}u(k,\ s)(-g^{\mu\nu}/q^{2})(+e)(p+p')_{\nu} \tag{6.51}$$

この式の前についている標準的な因子を落として，いわゆる不変振幅を定義すると便利である．$\pi^{+}\mathrm{e}^{-}$ 散乱の不変振幅は

$$F_{ss'}\equiv(-e)\bar{u}(k',\ s')\gamma_{\mu}u(k,\ s)(-g^{\mu\nu}/q^{2})(+e)(p+p')_{\nu} \tag{6.52}$$

で定義する．振幅 F は電子のスピン標識 s，s' だけで区別されるようにしておいた．

ボソン散乱の例と同じように，振幅に現れるいろいろな因子を，Feynman 図形のいろいろな要素に対応させると便利である．これを図 6.3 に示しておく．因子と図形要素との対応は，以前のパイオン線・光子線の場合とまったく同様である．新しい特徴は，初めと終わりのスピノール u，$\bar{u}'$ がそれぞれはいってくることと，頂点の因子が行列 $+\mathrm{i}e\gamma^{\mu}$ になることである．

これから次の規則が得られる．

(viii)　図形に入ってくるフェルミオンはそれぞれスピノール $u(k, s)$，図形から出ていくフェルミオンにはスピノール $\bar{u}(k', s')$ を，対応する規格化

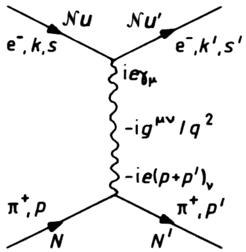


図 6.3 1 光子交換の近似による $e^-\pi^+$ 散乱の Feynman 図形

定数とともに付す．

(ix) 電荷 Q に対してフェルミオン・光子・フェルミオンの頂点は $-iQ\gamma^\mu$ である．

またスピノールの順序もたいせつであって，

$$\bar{u}'\gamma_\mu u \equiv \bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu u(k,\ s) \tag{6.53}$$

の意味であるから，指標 μ の値を 1 つ指定すると，この行列積は 1 つの数を表す．これら 4 つの数は Lorentz 変換のもとで，ある 4 元ベクトルの成分として変換し，ほかの頂点から由来する 4 元ベクトル $(p+p')^\mu$ と"縮約"して，Lorentz 不変な（スカラー）振幅を与えるのである．

断面積を計算する段取りは，スピン 0 の場合とまったく同様である．スピン状態 s の電子が，スピン状態 s' の電子へ散乱される断面積は

$$\begin{aligned} d\sigma_{ss'} &= \frac{1}{4E\omega|\boldsymbol{v}|}|F_{ss'}|^2(2\pi)^4\delta^4(k'+p'-k-p) \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{2\omega'}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{2E'} \end{aligned} \tag{6.54}$$

である（式(5.86) を参照）．ここで 4 元運動量を 3 元運動量とエネルギーで表すと

$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega,\ \boldsymbol{k}), & k'^\mu &= (\omega',\ \boldsymbol{k}'), \\ p^\mu &= (E,\ \boldsymbol{p}), & p'^\mu &= (E',\ \boldsymbol{p}') \end{aligned} \tag{6.55}$$

である．$F_{ss'}$ の中の行列積は，γ 行列とスピノールのあからさまな形

$$u(k,\ s)=(\omega+m)^{1/2}\begin{pmatrix}\phi^s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+m}\phi^s\end{pmatrix} \tag{6.56}$$

などを使って直接計算することができよう．しかし，実際にはこれは非常にめんどうな計算であり，さらに，ふつう実験家が測定するような量と直接結びついていない．もっとも簡単な実験では，（確かに今日までのパイオン・電子散乱の実験はこのたぐいなのであるが，）初めの電子が偏極していない．これはスピン上向き（↑）の電子とスピン下向き（↓）の電子が同じ個数だけ含まれている実験の平均とみなすことができる．たいせつなことは，これは非干渉的な平均であって，振幅ではなく断面積について平均をとる意味である．そのうえ，たいていの実験では，ふつう散乱された電子の方向とエネルギーだけをはかって，偏極状態（↑か↓か）に注意をはらわない．したがって，実験と比較するために実際に計算したい量は，次の式で定義される偏りを考えない断面積（非偏極断面積）

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}\equiv\frac{1}{2}(\mathrm{d}\sigma_{\uparrow\uparrow}+\mathrm{d}\sigma_{\uparrow\downarrow}+\mathrm{d}\sigma_{\downarrow\uparrow}+\mathrm{d}\sigma_{\downarrow\downarrow}) \tag{6.57}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\mathrm{d}\sigma_{ss'} \tag{6.58}$$

である．すなわち初めのスピン偏極 $(2=2s+1)$ については平均し，初めのスピン状態から生じた終わりのスピン状態については和をとるのである．

もちろん，それぞれの断面積をあからさまに計算して足し合わせることも，あながち不可能ではない．だが幸いにして，Feynman による強力な省力化の方法が工夫されていて，めんどうな計算を回避することができる．次節でこのいわゆる“対角和の技法（跡の技法）”を論じよう．

6．4　スピン和に関する対角和の技法

まずはじめに行列の対角和（対角要素の和，跡ともいう）

$$\mathrm{Tr}\mathbf{A}=\sum_i A_{ii} \tag{6.59}$$

の性質を調べておく．この定義は，行列積の対角和

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})=\sum_i(\mathbf{AB})_{ii}=\sum_{i,j}A_{ij}B_{ji} \tag{6.60}$$

について重要な性質を導く．この式では，繰り返した添字について和をとる，という規約は用いていないことに注意せよ．いったん行列要素の添字をあからさまに示してしまえば，(行列要素は数にすぎないから)行列要素の和をとるときに，その順序は自由にかえてよい．添字は自動的に和を追いかけていく．したがって対角和は

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})=\sum_{i,j}B_{ji}A_{ij} \tag{6.61}$$

となり，望んでいた関係

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})=\mathrm{Tr}(\mathbf{BA}) \tag{6.62}$$

が証明される．この拡張として

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{ABC})=\mathrm{Tr}(\mathbf{CAB}) \tag{6.63}$$

が成り立ち，行列を循環的に入れ替えても対角和は変わらない．

$|F_{ss'}|^2$ を考えると，式(6.52) より

$$F_{ss'}=(e^2/q^2)\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu u(k,\ s)(p+p')^\mu \tag{6.64}$$

だから

$$|F_{ss'}|^2=(e^2/q^2)^2[\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu u(k,\ s)(p+p')^\mu]$$
$$\times[\bar{u}(k',\ s')\gamma_\nu u(k,\ s)(p+p')^\nu]^* \tag{6.65}$$

を得る．さて $F_{ss'}$ は複素数（1行1列の行列）であり，複素共役をとることはエルミート共役をとることと同等であるから

$$[\bar{u}(k',\ s')\gamma_\nu u(k,\ s)(p+p')^\nu]^\dagger=[u^\dagger(k,\ s)\gamma_\nu^\dagger\gamma_0^\dagger u(k',\ s')](p+p')^\nu$$
$$=\bar{u}(k,\ s)\gamma_\nu u(k',\ s')(p+p')^\nu \tag{6.66}$$

ただし

$$\bar{\gamma}_\nu\equiv\gamma_0\gamma_\nu{}^\dagger\gamma_0=\gamma_\nu \tag{6.67}$$

の関係（問題6．2参照）を用いた．スピン和については次の量を計算しなくてはならない．

$$\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|F_{ss'}|^2=\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2\frac{1}{2}\sum_{s,s'}\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu u(k,\ s)\bar{u}(k,\ s)\gamma_\nu u(k',\ s')$$
$$\times(p+p')^\mu(p+p')^\nu \tag{6.68}$$
$$\equiv\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{6.69}$$

すなわち，和は Dirac 代数（γ 行列）を含む“レプトン・テンソル” $L_{\mu\nu}$

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu u(k,\ s)\bar{u}(k,\ s)\gamma_\nu u(k',\ s') \tag{6.70}$$

と，パイオンの頂点に対する“ハドロン・テンソル” $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu}=(p+p')^\mu(p+p')^\nu \tag{6.71}$$

との積に分解される．この分割は，図 6.4 に示されているように，“1光子交換”の近似をとったから起こったのである．

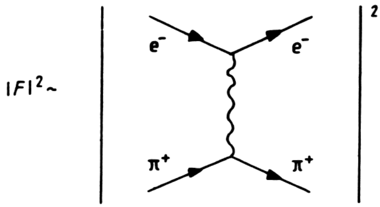


図 6.4　$e^-\pi^+$ 散乱の $|F|^2$ に対する 1 光子交換の近似

やっかいなのはレプトン・テンソルの計算である．この項を，和の規約（繰り返した添字について和をとること）に従う行列指標を明示して書き下すと

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\bar{u}_\alpha(k',\ s')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_\beta(k,\ s)\bar{u}_\gamma(k,\ s)(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}u_\delta(k',\ s') \tag{6.72}$$

である．こう書けばすべての量は行列の要素，すなわち数であるから，各因子を別々に考察することができる．s に依存する項

$$\sum_s u_\beta(k,\ s)\bar{u}_\gamma(k,\ s) \tag{6.73}$$

を考えよう．すべての可能な β と γ の組み合わせに対して，この積は 16 個の量を表すが，$s=\uparrow,\ \downarrow$ について和をとるから，結果は s によらない．これら 16 個の量を 4 行 4 列の行列の形に書くことができる．

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3,\ \bar{u}_4)=\begin{pmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & \cdots \\ u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{6.74}$$

この行列を計算するため，$u(k,\ s)$ のあからさまな形

$$u(k,\ s)=(\omega+m)^{1/2}\begin{pmatrix} \phi^s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+m}\phi^s \end{pmatrix} \tag{6.75}$$

を用いる．2 成分スピノールの偏極（スピン）についての和は

$$\phi^1\phi^{1\dagger}+\phi^2\phi^{2\dagger}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.76}$$

のように 2 行 2 列の単位行列になることに注意すると，式(6.73) の結果は

$$u(k,\ \uparrow)\bar{u}(k,\ \uparrow)+u(k,\ \downarrow)\bar{u}(k,\ \downarrow)=(\omega+m)\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+m} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+m} & -\dfrac{\omega-m}{\omega+m}\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{6.77}$$

$$=(\not{k}+m) \tag{6.78}$$

となる（問題 6. 3）．ここで $\not{k}$ は行列 $\omega\gamma^0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ を表し，m にかかる 4 行 4 列の単位行列はあからさまには書かないという習慣に従っている．したがって，はじめのスピン状態に関する和は，行列 $(\not{k}+m)$ のしかるべき要素で置き換えることができる．

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{s'}\bar{u}_\alpha(k',\ s')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\not{k}+m)_{\beta\gamma}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}u_\delta(k',\ s') \tag{6.79}$$

行列要素は任意の順序に再配列することができるから，終わりのスピン状態についての和にも，同じ技法を用いることができる．

$$\sum_{s'}u_\delta(k',\ s')\bar{u}_\alpha(k',\ s')=(\not{k}'+m)_{\delta\alpha} \tag{6.80}$$

このようにして，$L_{\mu\nu}$ は，行列のある積の対角要素の和，すなわち対角和または跡の形をとる．

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\not{k}' + m)_{\delta\alpha}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\not{k} + m)_{\beta\gamma}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \tag{6.81}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\not{k}' + m)\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu] \tag{6.82}$$

さて，このような変形は何の役に立つであろうか．Dirac の γ 行列の特別な性質

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{6.83}$$

によって，γ 行列の積の対角和は簡単に計算できるのである．ここには単に，$L_{\mu\nu}$ を計算するときに用いる“対角和の公式”を掲げるにとどめよう．対角和の公式の証明を含む γ 行列代数の詳細な解説は，付録 D に与えてある．

次の公式が必要である．

(a)　$\mathrm{Tr}\mathbf{1} = 4$ (6.84 a)

(b)　Tr(奇数個の γ)$=0$ (6.84 b)

(c)　$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4(a\cdot b)$ (6.84 c)

(d)　$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c) - (a\cdot c)(b\cdot d)]$ (6.84 d)

さて

$$\mathrm{Tr}[(\not{k}' + m)\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu] = \mathrm{Tr}(\not{k}'\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu) + m\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu) + m\mathrm{Tr}(\not{k}'\gamma_\mu\gamma_\nu) + m^2\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) \tag{6.85}$$

において，m の 1 次の項は公式 (b) によって 0 である．公式 (c) を

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)a^\mu b^\nu = 4g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = 4a\cdot b \tag{6.86}$$

の形で適用し，(d) も同様な形で適用すると

$$\mathrm{Tr}[\not{k}' + m)\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu] = 4[k'_\mu k_\nu + k_\nu' k_\mu - (k\cdot k')g_{\mu\nu}] + 4m^2 g_{\mu\nu}$$

となる（問題 6.4）．ここで

$$q^2 = (k - k')^2 = 2m^2 - 2k\cdot k' \tag{6.87}$$

であるから，レプトン・テンソル(6.82) の最終的な形は

$$\boxed{L_{\mu\nu} = 2[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + (q^2/2)g_{\mu\nu}]} \tag{6.88}$$

と書くことができる．テンソル $L_{\mu\nu}$ は，弾性散乱ばかりでなく，電子の非弾性散乱や，実際たいていのクオーク（パートン）過程の計算に現れるので，非常に重要である．さて断面積を算出するには，$L_{\mu\nu}$ と $T^{\mu\nu}$ の縮約を行わなくてはならない．

6. 5 $e^-\pi^+$ 散乱および $e^+\pi^+$ 散乱の断面積

偏りを考えない $e^-\pi^+$ 散乱断面積を算出するためには，次の量（式(6.69)参照）を計算する必要がある．

$$\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|F_{ss'}|^2=\left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{6.89}$$

$L_{\mu\nu}$ の形および $T^{\mu\nu}$ の形

$$T^{\mu\nu}=(p+p')^\mu(p+p')^\nu \tag{6.90}$$

より，結果は

$$L_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=8[2(p\cdot k)(p\cdot k')+(q^2/2)M^2] \tag{6.91}$$

である（問題6．5）．ここで運動量の保存から $k'\cdot p'=k\cdot p$ および $k\cdot p'=k'\cdot p$，また $p^2=p'^2=M^2$（電子の質量を m，パイオンの質量を M と書く）であることを用いた．さてこれだけの"定石計算"を終えて，いまや微分断面積を Lorentz 不変な形にでも，特別な座標系における形にでも，求めることができる．結果を $p^\mu=(M,\ \mathbf{0})$ で定義される"実験室系"で書いてみよう．（この系は実際の $e\pi$ 散乱については現実的ではない．）計算は付録 E で行ってある．

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}\cos^2(\theta/2)\frac{k'}{k} \tag{6.92}$$

この式を導くとき，運動学の中で電子の質量を無視した．したがって

$$k\equiv|\boldsymbol{k}|=\omega \tag{6.93a}$$

$$k'\equiv|\boldsymbol{k}'|=\omega' \tag{6.93b}$$

$$q^2=-4kk'\sin^2(\theta/2) \tag{6.94}$$

が成り立つ．θ は図 6.5 に示すように，この座標系における電子の散乱角である．相空間の積分の計算にはちょっとした注意がいるが，付録 E に詳しく述べ

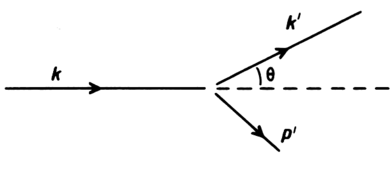


図 6.5 "実験室"系における 2 体散乱

である．式(6.92) の断面積を“無構造”断面積と呼ぶ．

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{ns}} \qquad \text{（“無構造”断面積）} \tag{6.95}$$

この断面積は，本質的には，標的粒子の反跳を考慮した相対論的電子の“運動学”を記述するものである．この“無構造”断面積は，陽子やミューオンによる電子の散乱にも登場する．“無構造”という名称は，のちに形状因子を議論するときにあきらかになるであろう．

今度は $e^+\pi^+$ 散乱を考えよう．ボソンの場合，π^+ に対する“波動関数”的カレント j_{fi}^{μ} は $e(p_f+p_i)^{\mu}$ の形であった．したがって p の符号を変えて電荷 $(-e)$ を持つ粒子のカレントが正しく得られた．フェルミオンの場合，e^- に対する波動関数的カレントは $-e\bar{u}_f\gamma^{\mu}u_i$ であり，$k_i\to-k_i$，$k_f\to-k_f$ と変えても符号は変わらない．ただ u がすべて v になるだけである．3．5節で指摘したように，フェルミオンに対する波動関数的手法では，マイナス符号を手で持ち込まなくてはならない理由がここにある．しかし，場の理論のカレント演算子 $-e\bar{\hat{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi}$ を用いれば正しい結果が自動的に得られる（そうでなくてはならない！）．4．5節，4．6節で見たように，カレントの $\mu=0$ 成分の空間積分（電荷の演算子）は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{em}}=-e\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}\sum_s[\hat{c}_s^{\dagger}(k)\hat{c}_s(k)-\hat{d}_s^{\dagger}(k)\hat{d}_s(k)] \tag{6.96}$$

であって，フェルミオンと反フェルミオンの部分は反対符号で入っていることがわかる．$\hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}$ についても同様である．したがって4元運動量 k，スピン指標 s の陽電子がポテンシャル $\hat{V}_D$ によって k'，s' の状態へ散乱される振幅は

$$\bar{v}(k,\ s)(-\mathrm{i}e\gamma^{\mu})v(k',\ s') \tag{6.97}$$

“でていく”粒子　余分なマイナス符号　“入ってくる”粒子

である（図6.6を参照），規則 (viii)，(ix) を反フェルミオンに拡張することは自明である．



図6.6　1次の e^+ 散乱過程に対する Feynman の解釈

次の結果

$$\sum_s v(k, s)\bar{v}(k, s)=(\not{k}-m) \tag{6.98}$$

を用いて，対角和はまったく前の場合と同じように計算できる．この近似(α の最低次) では $e^-\pi^+$ 散乱と $e^+\pi^+$ 散乱の断面積は同じになる．

6. 6 パイオンの形状因子と不変性の議論

これまでのパイオン・電子散乱の取り扱いでは，パイオンがハドロンであって強い相互作用を持つ，という事実を無視してきた．現実には，パイオンと光子の頂点に“仮想的な”強い相互作用の影響が現れて，簡単な摂動像を修正するはずである，と考えられる．たとえば，図 6.7 (*a*), (*b*) に示すような図形からの寄与があると考えられよう．

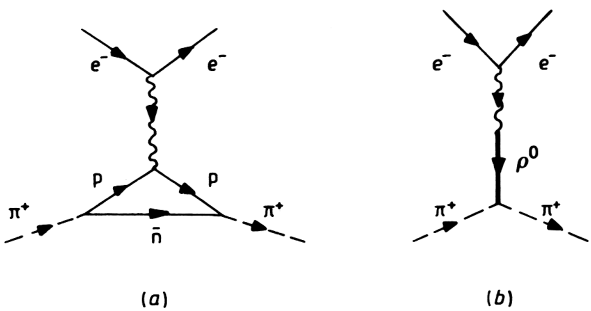


図 6.7 $\pi\pi\gamma$ 頂点に寄与する仮想過程 (*a*) 仮想核子の閉線 (*b*) 仮想 ρ 中間子

強い相互作用の結合定数は小さくないから，意味のある近似では，この影響を無視するわけにはいかない．どのようにしてこの影響を取り入れることができるであろうか．強い相互作用についての現在の知識では，これらの効果をすべて計算することはできないが，幸いにして，強い相互作用の寄与の運動学的型式は，2 つの重要な対称性の原理 — Lorentz 不変性と電磁カレントの保存則 — によって，きわめて強く制約されてしまうのである．不変性の議論によって相互作用の型式に制限をつけることは，完全な理論が知られていない場合には，きわめて一般的かつ重要な手法である．この手法を，パイオンと仮想光子

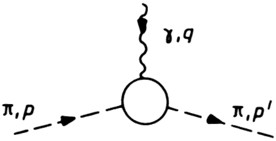


図 6.8　一般的な $\pi\pi\gamma$ 頂点

の相互作用に適用してみよう．図 6.8 では，強い相互作用の効果はすべて頂点の“丸”（ブロッブ）で表してある．これは強い相互作用についての不案内ぶりを総括したものである．

6. 6. 1　Lorentz 不変性

すでに導いたパイオンの Feynman 規則は，すべての強い相互作用を無視したものである．これらの効果は，パイオンにある自明でない“構造”と有限な大きさを与えるであろう．にもかかわらず，強い相互作用の影響を受けない仮説的な“点”パイオンを考えることは有用である．このような“点”パイオンに対して，遷移電磁カレントは

$$j_\mu(\pi)=eNN'(p+p')_\mu \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(p'-p)\cdot x} \tag{6.99}$$

と書けることはわかっている．これは，電磁カレント演算子の 1 パイオン状態の間の行列要素と考えることができる (式(5.59) 参照)．演算子の座標依存性はすべて指数の肩にのっているから

$$\langle\pi^+(p')|\,\hat{j}^\mu_{\mathrm{em}}(0)\,|\pi^+(p)\rangle=eNN'(p+p')^\mu \tag{6.100}$$

と同定することができる．これは点パイオンについての形である．強い相互作用の効果は，パイオンの電磁カレントのこの形を修正するであろうが，その 4 元ベクトル性まで変更することはない，と考えられる．したがって，現実のパイオンに対する一般的な形を見いだすためには，まずカレントの 4 元ベクトル性をパラメーター化するに足る手持ちの独立な 4 元運動量ベクトルを数えあげる必要がある．これらは

$$p,\ p' \text{ と } q \tag{6.101}$$

であるが，条件

$$p'=p+q \tag{6.102}$$

が成り立つから，独立な運動量は2つである．独立な運動量として線型結合

$$(p'+p)_\mu \tag{6.103}$$

$$(p'-p)_\mu=q_\mu \tag{6.104}$$

をとる．一般に，この2つの4元ベクトルを使って，現実のパイオンの電磁カレントの4元ベクトル性をパラメーター化することができる．さらに，このベクトルには，この過程のLorentzスカラー積から成る任意の未知のスカラー関数が乗ぜられていても差し支えない．

$$p^2=p'^2=M^2 \tag{6.105}$$

$$q^2=2M^2-2p\cdot p' \tag{6.106}$$

が成り立つから，ここにはただ1つのスカラーしかなく，これを q^2 — 頂点における4元運動量移行の大きさ — に選んでよい．したがってLorentz不変性から，パイオンの電磁カレントを

$$\langle\pi^+,\ p'|\,\hat{j}^{\mu}_{\rm em}(0)\,|\pi^+,\ p\rangle=eNN'[F(q^2)(p'+p)^\mu+G(q^2)q^\mu] \tag{6.107}$$

の形に書くことができる．関数 F および G を“形状因子”と呼ぶ．Lorentz不変性が助けてくれるのはここまでである．パイオンの形状因子をさらに制約するには，第2の対称性を考慮しなくてはならない．

6.6.2 カレントの保存則とゲージ不変性

5.1節で論じたように，ゲージ変換

$$A^\mu\to A^\mu-\partial^\mu\chi \tag{6.108}$$

はMaxwell方程式を不変に保つ．したがって A^μ に対するゲージを選ぶ自由度があり，これにLorentz条件

$$\partial_\mu A^\mu=0 \tag{6.109}$$

を課すのが便利である．このゲージでは，Maxwell方程式は

$$\Box A^\mu=j^\mu \tag{6.110}$$

となり，ゲージ条件はよく知られた電荷の保存則

$$\partial_\mu j^\mu=0 \tag{6.111}$$

と一致する．

平面波のパイオンのカレントの式(5.59)に対しては，微分は因子 q_μ をかけることになるから

$$-i\partial_\mu j^\mu(\pi)=q_\mu j^\mu(\pi) \tag{6.112}$$

となり，カレントの保存則は電磁カレント演算子 $\hat{j}^\mu_{\mathrm{em}}(0)$ の行列要素に対する条件

$$q_\mu\langle\pi^+(p')|\,\hat{j}^\mu_{\mathrm{em}}(0)\,|\pi^+(p)\rangle=0 \tag{6.113}$$

と等価である．

“点”パイオンの場合は，

$$q\cdot(p'+p)=0 \tag{6.114}$$

が成り立つから明らかに保存則が成立している．一般の場合には次の条件

$$q_\mu[F(q^2)(p'+p)^\mu+G(q^2)q^\mu]=0 \tag{6.115}$$

が得られるが，第1項は式(6.114)により0になる．しかし一般には $q^2\neq0$ であるから，カレントの保存は条件

$$G(q^2)=0 \tag{6.116}$$

を意味する．言い換えれば，$\pi^+\pi^+\gamma$ 頂点におけるあらゆる仮想的な強い相互作用は，仮想光子の4元運動量の2乗の関数としてただ1つのスカラー関数で表される．

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e(p'+p)^\mu & \rightarrow & eF(q^2)(p'+p)^\mu \\ \text{“点”パイオン} & & \text{“現実の”パイオン}\end{array}} \tag{6.117}$$

$F(q^2)$ を，パイオンの電磁形状因子という．

電荷は，運動量移行が0のときの結合定数と定義される．したがって形状因子は条件

$$F(0)=1 \tag{6.118}$$

で規格化されている．0でない q^2 に対する形状因子の値は，“空間的”（$q^2\leqq0$）な値に関しては電子・パイオン散乱の実験により，また“時間的”（$q^2\geqq4M^2$）な値に関してはその“交差チャンネル”の反応 $e^+e^-\rightarrow\pi^+\pi^-$ の実験によって，測定することができる．パイオンの理論にとっては，このような測定値を説明し予言することが，理論の成否をためす挑戦になる．物理的には，形状因子は $|q|^2$ が増大するにつれて小さくなると予想される．おおまかに言って，形状因子は1パイオンが1パイオンとして生き残る確率を表すからである．$|q|^2$ が増大するに従い，新しく粒子を発生するような非弾性過程の確率がだんだん大きくな

り，それに応じて弾性散乱の確率は小さくなる．

6. 7 電子・ミューオン弾性散乱

次に $e^-\mu^-$ 弾性散乱を考えよう．図 6.9 に必要な変数が示してある．摂動論の最低次の近似（1 光子交換の近似）では，適切な Feynman 図形は図 6.10 である．図形の各要素はすべて既出のものであるから，ただちに不変振幅 $F_{sr\,;\,s'r'}$ を書き下すことができる．振幅は今度は 4 個の標識を含む．

$$\boxed{F_{sr\,;\,s'r'}=(-e)\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu u(k,\ s)(-g^{\mu\nu}/q^2)(-e)\bar{u}(p',\ r')\gamma_\nu u(p,\ r)} \tag{6.119}$$

偏極したレプトンを用いる実験はめずらしくないが，ここでは偏りを考えない断面積だけを調べることにしよう．

$$\mathrm{d}\sigma\sim\frac{1}{4}\sum_{s,r}\sum_{s'r'}|F_{sr\,;\,s'r'}|^2 \tag{6.120}$$

$e\pi$ 散乱の場合とまったく同じ計算を行えば，断面積は 2 つの対角和を含む積に因数分解できる．

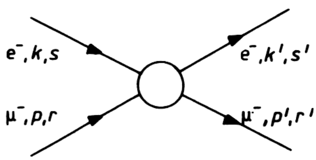


図 6.9　$e^-\mu^-$ 散乱振幅

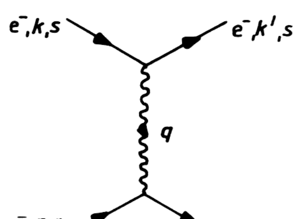


図 6.10　$e^-\mu^-$ 散乱の 1 光子交換振幅

$$\frac{1}{4}\sum_{s,r}\sum_{s',r'}|F_{sr\,;\,s'r'}|^2=\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu]\right\}$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\not{p}'+M)\gamma^\mu(\not{p}+M)\gamma^\nu]\right\} \tag{6.121}$$

$$\equiv\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{6.122}$$

ここで $L_{\mu\nu}$ は前に計算した“電子テンソル”

$$L_{\mu\nu}=2[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+(q^2/2)g_{\mu\nu}] \tag{6.123}$$

であり，$M^{\mu\nu}$ は $L_{\mu\nu}$ と同じ構造を持つ“ミューオン・テンソル”

$$M^{\mu\nu}=2[p'^\mu p^\nu+p'^\nu p^\mu+(q^2/2)g^{\mu\nu}] \tag{6.124}$$

である．

断面積を算出するためには，“縮約” $L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ を行わなくてはならない．計算を簡単にする有用な技法の 1 つは，電子テンソルにカレント保存則を適用することである．電子の遷移カレントに対して，電磁カレント保存の条件は

$$\partial^\mu j_\mu(\mathrm{e})=0 \tag{6.125}$$

である（式(6.111) 参照）．ここで採っている平面波の解に対しては，この条件は

$$q^\mu[\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu u(k,\ s)]=0 \tag{6.126}$$

となる．この左辺の式はまさに

$$\bar{u}(k',\ s')(\not{k}-\not{k}')u(k,\ s) \tag{6.127}$$

であり，Dirac 方程式

$$\not{k}u(k,\ s)=mu(k,\ s) \tag{6.128}$$

$$\bar{u}(k',\ s')\not{k}'=m\bar{u}(k',\ s') \tag{6.129}$$

によって 0 になる．この式は明らかにスピン射影 s，s' とは無関係に成立する．$L_{\mu\nu}$ はこのようなカレントの積であるから，総和をして偏りについて平均を行なっても，カレントの保存則は条件

$$q^\mu L_{\mu\nu}=q^\nu L_{\mu\nu}=0 \tag{6.130}$$

を満たす．これは $L_{\mu\nu}$ のあからさまな形を使っても確かめることができる．この条件が有用であるのは，縮約 $L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ を行うときに $M^{\mu\nu}$ の中の p' を $p+q$ でおきかえ，q を含むすべての項を落としてしまっても差しつかえないからである．あるいは

$$L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}_{\rm eff} \tag{6.131}$$

と書けば

$$M^{\mu\nu}_{\rm eff}=2[2p^{\mu}p^{\nu}+(q^2/2)g^{\mu\nu}] \tag{6.132}$$

である．断面積の計算は，あとは一瀉千里である．(再び現実的ではないが)初めのミューオンが静止している“実験室系”

$$p^{\mu}=(M,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{6.133}$$

においては，断面積は（問題6．6を参照）

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}=\left(\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}\right)_{\rm ns}\left(1-\frac{q^2\tan^2(\theta/2)}{2M^2}\right) \tag{6.134}$$

となる．M はミューオンの質量である．次の諸点に注意してほしい．

(a)　πe 散乱の“無構造”断面積に，$\tan^2\theta/2$ の寄与をもつ修正項が付け加わった．これはミューオンがスピン 1/2 を持つから，電子はミューオンの電荷によってもまた磁気双極子によっても散乱されるからである．

(b)　運動学では電子質量を省略した．これは通常高エネルギー領域ではよい近似である．パイオンやミューオンの静止系という非現実的な“実験室”系で断面積を算出したことについて，一言説明を加えておこう．“無構造”断面積や，2つの点 Dirac 粒子同士の断面積は，次章で行うクォーク・パートン模型の議論にたいへん役だつのである．

(c)　この過程の交差チャンネルの反応 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ は，電子・陽電子ビーム衝突型加速器にとって，きわめて重要なモニター（調整）反応であり，また $e^+e^-\to$ ハドロンの反応にクォーク・パートン模型の予言を行うときの基礎になる．本文と同じような計算を交差チャンネルについて行うことは，よい演習問題である．(問題6．7を参照）結果は

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4q^2}(1+\cos^2\theta) \tag{6.135}$$

で与えられる．ここですべての変数は e^+e^- の重心系で定義され，粒子の質量はすべて無視した．

6. 8　電子・陽子散乱と核子の形状因子

ep 弾性散乱の Feynman 図形は，1光子交換の近似で図 6.11 で表される．ppγ 頂点の“丸”は，強い相互作用によって“点”の結合が修正されていることを示す．陽子の頂点の構造は，パイオンの頂点の構造と同じように，対称性の原理を用いて解析することができる．しかし，Dirac スピノールと γ 行列があるため，ややややっかいな手続きが必要である．問題 6. 8 はこの種の複雑さの一例である．このような解析は，たとえば Bernstein (1968) の著書に詳しく与えられている．非弾性散乱に対してもたやすく拡張できるように，ここでは少し異なった方法をとってみよう．しかし Lorentz 不変性とカレントの保存則に根拠をおくことは変わらない．議論にはいるまえに，どんなことが出てくるか予想をつけておこう．

“点”陽子からの電子散乱の例を考える．これは粒子の電荷の符号の違いを別にすれば，$e^-\mu^-$ 散乱の計算と同じである．断面積は2つのテンソル $L_{\mu\nu}$（電子テンソル）と $T^{\mu\nu}$（“点”陽子テンソル）の積に因数分解され，M を陽子質量とすれば eμ 散乱と同じ式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{ns}}\left(1-\frac{q^2\tan^2(\theta/2)}{2M^2}\right) \tag{6.136}$$

で表される．かっこの中の2つの項は，それぞれ電荷による散乱および磁気双極子による散乱と考えられる．現実の陽子は点粒子ではなく，強い相互作用の仮想的な効果は，電荷の分布も磁気双極子の分布も変えてしまう．したがって，点粒子のふるまいからのずれを記述するためには，2つの形状因子がいるだろうと予想できる．すぐあとでみるように，まさにそうなっている．

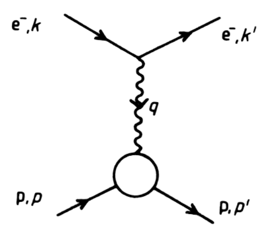


図 6.11　e^-p 散乱における1光子交換振幅．ppγ 頂点はハドロンによる補正を含む

点陽子に対しては，電磁カレントの行列要素は

$$\langle \mathrm{p}\,;\,p',\ s'\,|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{p}\,;\,p,\ s\rangle=(+e)\mathcal{N}\mathcal{N}'\bar{u}(p',\ s')\gamma^{\mu}u(p,\ s) \tag{6.137}$$

である(式(6.100)参照)．テンソル $T^{\mu\nu}$ もまた，このような因子の積を偏り（スピン）について総和し平均したものである．現実の陽子の場合は，対称性の議論によって $T^{\mu\nu}$ の形を導くことができる．

6. 8. 1　Lorentz 不変性

$T^{\mu\nu}$ は 2 階テンソルの性格を保持するはずである．これを自由に使える 4 元ベクトルとテンソルから作りあげなくてはならない．スピンについて平均をした場合は $p'=p+q$ だから

$$p,\ q,\ g_{\mu\nu} \tag{6.138}$$

しか残らない．反対称テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$（付録 D 参照）はパリティ（空間反転の偶奇性）不変性によって除かれる．すなわち，$\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}$ がベクトルだから $T^{\mu\nu}$ は擬テンソルではない．$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ は 3 次元の ε_{ijk} の拡張であって，2 つの 3 元ベクトルのベクトル積（擬ベクトル）は

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k \tag{6.139}$$

のように書けることを覚えておくと役に立つ．

6. 8. 2　カレントの保存則

現実の陽子については，カレントの保存則は条件

$$q_{\mu}\langle \mathrm{p}\,;\,p',\ s'\,|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{p}\,;\,p,\ s\rangle=0 \tag{6.140}$$

を与える（式(6.130) を参照)．テンソル $T^{\mu\nu}$ に関しては，これを条件

$$q_{\mu}T^{\mu\nu}=q_{\nu}T^{\mu\nu}=0 \tag{6.141}$$

に翻訳することができる（式(6.130) 参照)．

これらの要求を 2 つとも満たすテンソルは，2 つしか作ることができない．その 1 つは p を含み q に垂直なベクトルである．ベクトル

$$\tilde{p}_{\mu}=p_{\mu}+\alpha q_{\mu} \tag{6.142}$$

を導入して，垂直条件

$$q\cdot\tilde{p}=0 \tag{6.143}$$

を課せば，α を決めることができて

$$\tilde{p}_\mu = p_\mu - (p\cdot q/q^2)q_\mu \tag{6.144}$$

となり，テンソル

$$\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu = [p^\mu - (p\cdot q/q^2)q^\mu][p^\nu - (p\cdot q/q^2)q^\nu] \tag{6.145}$$

は所期の条件を満たす．第2のテンソルは $g^{\mu\nu}$ を含み式(6.141) を満たすもので，

$$-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu/q^2 \tag{6.146}$$

ととることができる．このように，不変性の議論だけによって，陽子の頂点に現れるテンソル $T^{\mu\nu}$ は，2つのテンソルに q^2 の未定関数を乗じたものとしてパラメーター化することができる．

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = &4A(q^2)[p^\mu - (p\cdot q/q^2)q^\mu][p^\nu - (p\cdot q/q^2)q^\nu] \\ &+ 2M^2 B(q^2)(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu/q^2] \end{aligned} \tag{6.147}$$

と定義すれば，実験室系の断面積は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{ns}} [A + B\tan^2(\theta/2)] \tag{6.148}$$

である（問題6．14 参照）．

関数 A および B は，陽子の“電気的”形状因子および“磁気的”形状因子と関連させることができる．Dirac の“電荷”形状因子と Pauli の“異常磁気能率”形状因子は，

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{p}\,;\,p',\ s' | \hat{j}^\mu_{\mathrm{em}}(0) | \mathrm{p}\,;\,p,\ s\rangle = &(+e)\mathcal{N}\mathcal{N}'\bar{u}(p',\ s') \\ &\times \left[\gamma^\mu \mathcal{F}_1(q^2) + \frac{\mathrm{i}\kappa\mathcal{F}_2(q^2)}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right] u(p,\ s) \end{aligned} \tag{6.149}$$

によって定義される．ここで規格化は

$$\mathcal{F}_1(0) = 1 \tag{6.150 a}$$

$$\mathcal{F}_2(0) = 1 \tag{6.150 b}$$

であるが，陽子の磁気能率は電子やミューオン（高次補正を無視する）と違って単位磁子ではなく，$\mu_{\mathrm{p}} = 1+\kappa$，$\kappa = 1.79$ である．問題6．8は，式(6.149) の中の $\bar{u}\gamma^\mu u$ は $\bar{u}(p+p')^\mu u/2M$ の項と $\bar{u}\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu u/2M$ の項に書き換えられることを示す．この第1項は荷電スピン0粒子の相互作用に類似している．第2項について行列 $\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{i}[\gamma^{\mu},\ \gamma^{\nu}] \tag{6.151}$$

で定義され，γ 行列の表示からこの空間成分は Pauli のスピン行列

$$\sigma^{ij}=\begin{pmatrix}\sigma^{k} & 0\\ 0 & \sigma^{k}\end{pmatrix} \tag{6.152}$$

に帰着することがわかる．σ^{ij} は 4 行 4 列の行列，σ^{k} は 2 行 2 列の行列，i，j，k は循環の順序にあるとする．$\bar{u}\gamma^{\mu}u$ のこの“Gordon 分解”の第 2 項は，スピン磁気能率（実は $g=2$）による相互作用に対応する．したがって式(6.149）の $\varkappa$ 項は“異常”磁気能率に対応する．$\mathscr{F}_1$ および $\mathscr{F}_2$ を用いると

$$A=\mathscr{F}_1^2+\tau\varkappa^2\mathscr{F}_2^2 \tag{6.153}$$

$$B=2\tau(\mathscr{F}_1+\varkappa\mathscr{F}_2)^2 \tag{6.154}$$

と書ける．ここに

$$\tau=-q^2/4M^2 \tag{6.155}$$

である（問題 6. 14 参照）．電子・陽子弾性散乱の断面積の式は“Rosenbluth”の断面積と呼ばれる．点状粒子の断面積式(6.136)は，式(6.153)，(6.154)で $\mathscr{F}_1=1$，$\varkappa=0$ とおけば，式(6.148）から復原される．

弾性散乱の議論を終える前に，運動学についてもう少し詳しく考察をしておくと役に立つ．“点”状粒子の場合を考えれば十分なので，便宜上 $e^-\mu^+$ 散乱としよう．μ^+ の頂点におけるエネルギーと運動量の保存は

$$p+q=p' \tag{6.156}$$

で，質量殻上の条件

$$p^2=p'^2=M^2 \tag{6.157}$$

を満たす．M は μ^+ の質量である．したがって弾性散乱に対しては，関係

$$2p\cdot q=-q^2 \tag{6.158}$$

が成り立つ．これらの不変式を実験室系 $p^{\mu}=(M,\mathbf{0})$ の諸量で表すのが便利である．電子質量を省略すれば

$$k\equiv|\boldsymbol{k}|\equiv\omega \tag{6.159a}$$

$$k'\equiv|\boldsymbol{k}'|=\omega' \tag{6.159b}$$

であるから，

$$q^2=-2kk'(1-\cos\theta)=-4kk'\sin^2(\theta/2) \tag{6.160}$$

$$p\cdot q = M(k-k') = M\nu \tag{6.161}$$

が成り立つ．ν は実験室系のエネルギー移行 q^0 である．不必要な負号を避けて Q を

$$Q^2 = -q^2 = 4kk'\sin^2(\theta/2) \tag{6.162}$$

で定義するのが便利である．$p\cdot q$ と q^2 の間の弾性散乱の関係式は

$$\nu = Q^2/2M \tag{6.163}$$

$$\frac{k'}{k} = \frac{1}{1+(2k/M)\sin^2(\theta/2)} \tag{6.164}$$

である．したがって，弾性散乱に対しては k' と θ が独立な変数ではないことに注目すると，実験室系で変数変換を行うことができて（付録 E を参照），

$$\mathrm{d}\Omega = 2\pi\,\mathrm{d}(\cos\theta) = (\pi/k'^2)\mathrm{d}Q^2 \tag{6.165}$$

となり，$e^-\mu^+$ 散乱の微分断面積は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}Q^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}\frac{1}{kk'}\left[\cos^2(\theta/2) + 2\tau\sin^2(\theta/2)\right] \tag{6.166}$$

と書ける．弾性散乱では ν と Q^2 とは独立ではないが，それにもかかわらずこの関係を保証する δ 関数を挿入して，断面積を型式的に二重微分断面積の形に書くことができる．

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}\frac{1}{kk'}\left[\cos^2(\theta/2) + \left(\frac{Q^2}{2M^2}\right)\sin^2(\theta/2)\right]\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)} \tag{6.167}$$

これは電子が，電荷 e 質量 M を持つ点状のフェルミオン標的粒子によって散乱されるときの断面積である．

Q^2 および ν の物理的に許される範囲を図示しておくと有用である（図 6.12）．ep 弾性散乱は 直線 $Q^2 = 2M_\nu$ に対応する．核子の共鳴による励起状態の生成 $ep \to eN^*$，$p'^2 = M'^2$ は，

$$2M\nu = Q^2 + M'^2 - M^2 \tag{6.168}$$

で特徴づけられるから，これらは弾性散乱の直線に平行でかつ $M'^2 - M^2$ だけ右にずれた直線で表される．実光子を用いる実験は $Q^2 = 0$ で，ν 軸に沿って研究することに相当する．次章でいわゆる深非弾性電子散乱について論ずるが，これは Q^2 も大きく ν も大きい範囲の散乱である．

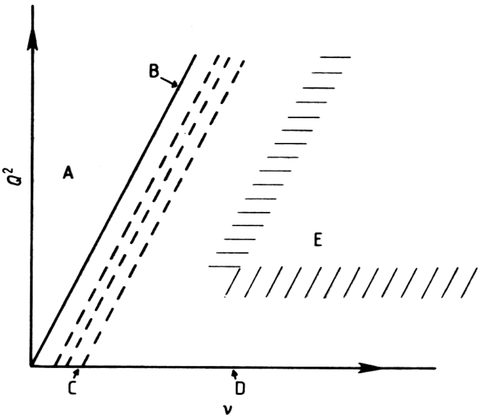


図 6.12 Q^2, ν 変数の物理的領域. A は運動学的に禁止される領域. B は弾性散乱を表す直線 ($Q^2=2M\nu$). C は電磁過程による (ハドロンの) 共鳴生成を表す直線. D は光による (ハドロンの) 共鳴生成を示す直線. E は深非弾性散乱の領域

6. 9 電子の Compton 散乱：電子の伝播関数

6. 9. 1 電子の伝播関数

5. 8 節で論じたパイオンの Compton 散乱の振幅と同じように，基本的な電子・光子過程を電子が内線粒子として現れるようにつなぎ合わせることができる．このような最低次の Feynman 図形は図 6.13 (a), (b)の 2 つである (図 5.14, 5.17 を参照)．これらはまさに電子の Compton 散乱過程

$$\gamma(k)+\mathrm{e}^-(p)\to\gamma(k')+\mathrm{e}^-(p') \tag{6.169}$$

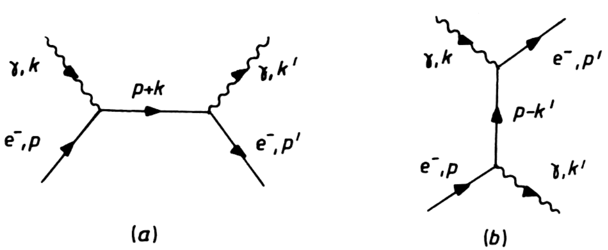


図 6.13 電子の Compton 散乱に対する e^2 の桁の寄与

の e^2 の桁の寄与を表す．再び，図 6.13 のすべての因子は内線の電子，すなわち 5．8．1 節の用語では電子の伝播関数，を除いては既知である．5．8．2 節でパイオンについて行ったように，2 つの方法のどちらでも伝播関数の形を求めることができる．はじめに 5．8．1 節で用いた簡単な議論を繰り返してみよう．伝播関数の形は，平面波の解に働くしかるべき波動演算子の逆演算子そのものである．スピン 1/2 の粒子に対して自由な Dirac 方程式

$$(\mathrm{i}\not\partial-m)\psi=0 \tag{6.170}$$

は式(5.185) の類推により置き換え $\partial^\mu\to\partial^\mu-\mathrm{i}eA^\mu$ を行うと

$$(\mathrm{i}\not\partial-m)\psi=-e\not A\psi \tag{6.171}$$

となる．したがって伝播関数は $(\not q-m)^{-1}$ に比例し，次の規則が得られる．

（x）　4 元運動量 q のスピン 1/2 の内線粒子には因子 $\mathrm{i}(\not q-m)^{-1}$ を付す．

恒等式

$$(\not q-m)(\not q+m)=q^2-m^2 \tag{6.172}$$

を用いると逆演算子 $(\not q-m)^{-1}$ は

$$(\not q+m)/(q^2-m^2) \tag{6.173}$$

と書ける．この表現では分母は光子やパイオンの場合にすでに親しんだ基本的な形をとる．スピン 1/2 の伝播関数は分子に 4×4 行列の因子をよけいに持つ．

この因子の出どころは，伝播関数を見いだすもう 1 つの方法（光子については 5．6 節，パイオンについては問題 5．7 参照）を考えれば納得できるであろう．この方法では図 6.13 (a), (b)のどちらかに表されているような 2 つの異なる非共変的な図形の和をあからさまに足し合わせる方法である．例えば図 6.14 (a), (b)を考えると足し合わせて図 6.13 (b) になる．これらの過程では電子か陽電子かが放出され，図に示すような中間状態で吸収される．これは図 5.7 (a), (b) で光子が放出吸収されるのと同じである．したがって，式(5.160) の中の光子の偏極ベクトルの和 $\sum_\lambda\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\mu$ とまったく同じように，放出され吸収される電子または陽電子の波動関数のスピン状態についての和にあたる因子を取り込まなくてはならない．図 6.14 (a) については分子の因子

$$\sum_s u(q_1,\ s)\bar{u}(q_1,\ s) \tag{6.174}$$

が得られ，図 6.14 (b) については u を v で置き換えた因子が得られる．関係式

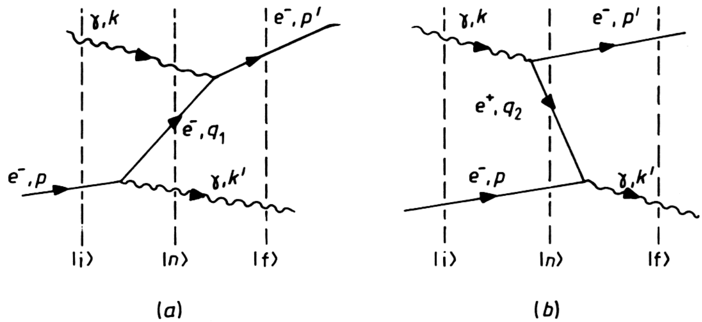


図 6.14　加え合わせれば図6.13(*b*)の共変的振幅を与えるような 2 つの非共変的振幅

(6.80)，(6.98) を用いて図 6.14 (*a*)，(*b*)の図形の振幅の和がまさしく式(6.173)の中の電子の伝播係数 $(\not{q}-m)^{-1}$ となることは，まったく自明ではない問題(問題6. 9) として読者に残しておく．

6. 9. 2　電子の Compton 散乱

不変振幅

$$F_{\gamma e}=F_{\gamma e}^{(d)}+F_{\gamma e}^{(e)} \tag{6.175}$$

は図 6.13 (*a*) に対応する“直接”過程の寄与

$$F_{\gamma e}^{(d)}=e^2\varepsilon_\nu^*(k',\ \lambda')\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\bar{u}(p',\ s')\gamma^\nu\frac{(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}\gamma^\mu u(p,\ s) \tag{6.176}$$

と，図 6.13 (*b*) に対応する“交換”過程の寄与

$$F_{\gamma e}^{(e)}=e^2\varepsilon_\nu^*(k',\ \lambda')\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\bar{u}(p',\ s')\gamma^\mu\frac{(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu u(p,\ s) \tag{6.177}$$

からなる．もちろん，図 5.18 にあたるような“接触項”はこの場合存在しない．ε_ν^* を k_ν' で，ε_μ を k_μ で置き換えたとき振幅式 (6.176)，(6.177) の和 (全振幅) は 0 になることを直接検算することができる (問題 6. 10)．したがってゲージ不変性を α の桁まで確認したことになる (式(5.203) を参照)．

断面積の計算には結構関心が高いのは，レプトンの原子核による深非弾性散乱(次の章および第 9 章を参照)のパートン模型で，最低次の QCD 補正を考えるときに必要となるからである．$|F_{\gamma e}|^2$ をはじめの電子および光子のスピンに

ついて平均し，終わりのスピンについて和をとらなくてはならない．まず直接過程の振幅 $F_{\gamma e}^{(d)}$ を考えよう．その寄与として

$$\frac{e^4}{4(s-m^2)^2}\cdot\sum_{\lambda,\lambda',s,s'}\varepsilon_\nu^{*\prime}\varepsilon_\mu\varepsilon_\rho^*\varepsilon'_\sigma\bar{u}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu u\bar{u}\gamma^\rho(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\sigma u' \quad (6.178)$$

を計算しなくてはならない．記法は自明な程度に簡略化し，かつ不変変数 $s=(p+k)^2$ を導入した．式(5.168) を用いると式(6.178) は

$$\frac{e^4}{4(s-m^2)^2}\cdot\sum_{s,s'}\bar{u}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu u\bar{u}\gamma_\mu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma_\nu u' \quad (6.179)$$

$$=\frac{e^4}{4(s-m^2)^2}\cdot\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not{p}'+m)\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu(\not{p}+m)\gamma_\mu(\not{p}+\not{k}+m)] \quad (6.180)$$

となる．第 2 段の変形で関係式 (6.62) により γ_ν を対角和の先頭に移動した．式 (6.180) は 8 個の γ 行列の跡を含み，今まで与えてきた計算法の範囲では手に余る．しかし，電子質量を無視すると非常に簡単になる．これは高エネルギー散乱の極限に関心がある場合で，パートン模型を応用するときも同じである．この場合，式(6.180) は

$$\frac{e^4}{4s^2}\mathrm{Tr}[\gamma_\nu\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\not{p}\gamma_\mu(\not{p}+\not{k})] \quad (6.181)$$

となり，付録Dの式(D.3) の結果を用いて

$$\frac{e^4}{s^2}\mathrm{Tr}[\not{p}'(\not{p}+\not{k})\not{p}(\not{p}+\not{k})] \quad (6.182)$$

$$=\frac{e^4}{s^2}\mathrm{Tr}[\not{p}'\not{k}\not{p}\not{k}] \qquad \not{p}^2=p^2=0 \text{ を使用} \quad (6.183)$$

$$=\frac{4e^4}{s^2}\cdot 2(p'\cdot k)(p\cdot k), \text{ 式(6.84d) および } k^2=0 \text{ より} \quad (6.184)$$

$$=-2e^4u/s \quad (6.185)$$

となる．ここで $u=(p-k')^2$ である．問題 6. 11 は残りの計算の指示を与える．スピンで平均した振幅の 2 乗は

$$\frac{1}{4}\sum_{s,s',\lambda,\lambda'}|F_{\gamma e}|^2=-2e^4\left(\frac{u}{s}+\frac{s}{u}\right) \quad (6.186)$$

で与えられる．重心系の断面積は

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)}=\frac{2\pi\cdot 2e^4}{64\pi^2 s}\left(\frac{-u}{s}-\frac{s}{u}\right)=\frac{\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{-u}{s}-\frac{s}{u}\right) \quad (6.187)$$

である（式(5.115) 参照）.

パートン模型の計算で実際に必要になるのは，はじめの光子が仮想的な場合に同じような量を計算することである(9. 4. 2 節を参照). しかし，5. 6 節の議論から偏極ベクトルの和の式(5.168)は仮想光子についても成り立つ. 違いは式 (6.183) から式(6.184) へ移る所に現れ $k^2 \neq 0$ でないことを思い出さなくてはならない. k^2 は空間的($k^2<0$)だから $k^2=-Q^2$（式(6.162) 参照）とおき，仮想光子の Compton 散乱

$$\gamma^*(k^2=-Q^2)+\mathrm{e}^-\to\gamma+\mathrm{e}^- \tag{6.188}$$

のスピンで平均した振幅の 2 乗は

$$-2e^4\left(\frac{u}{s}+\frac{s}{u}-\frac{2Q^2t}{su}\right) \tag{6.189}$$

になることがわかる（問題 6. 12 参照）.

6. 10　高次補正：繰り込みと QED の検証

スピン 0 の粒子の Feynman 規則を高次の“閉線”図形の計算に拡張したように，本章で展開したスピン 1/2 の粒子の規則も拡張できる. スピン 0 の場合(5. 9 節）と同じく，最低次（枝線）の図形を超えて計算しようとするやいなや，発散積分が現れる. われわれの方法は摂動論に基礎をおいており，摂動論がなんらかの意味を持つ限り，こういう無限大について何かしなくてはならない. あまり技術的に詳細な点にわたらないで，摂動論で生じてくる無限大を繰り込みの技法で飼い慣らすにはどうすればよいか，簡単な定性的議論を与えてみよう. はじめから強調しておきたいことは，われわれの議論はまったく摂動論の枠内で行われているということである. ある日誰かがやってきて，摂動論では繰り込み不能な理論からでも，有限な答をどうやって得るか説明してくれるかもしれない. しかし今のところは，現在のものに代わる計算法は存在しない. したがって，摂動による繰り込み可能性は物理的に意味のある理論の必要条件であると認められている†.

この要求はきわめて強い制約であることがわかってきたから，以上の最後の

---

†（原注） 以下この意味の繰り込み可能性を仮定する.

点は実はまったく自明ではない．この条件は可能な理論の種類を強く制限してしまう．この制約は，Weinberg（Weinberg，1980 参照）電弱理論（第 13，14 章を参照）の創出にあたって，大きな威力を及ぼした．この理論の繰り込み可能性の証明は t'Hooft（t'Hooft (1971b)）によって行われた．これは繰り込み理論について何か学ぶべしという格好の理由の 1 つである．もう 1 つは，言うまでもなく，繰り込まれた QED の予言が実験と一致するとてつもない精度である（以下に述べる）．

例えば，α の冪として摂動論で計算された $e^-\mu^-$ 散乱を考えよう．図 6.15 に対応する最低次の振幅は 6．7 節で計算された．さて α^2 の桁で入ってくる図形の寄与の 1 つとして図 6.16 に示すものを調べよう．この図形では，光子の伝播関数の中に電子・陽電子対が発生しついで消滅する "泡" が現れている．この図形の振幅は（ほぼ）既出の規則（5．9 節に述べた閉線の規則を含む）から計算できる．その結果，図 6.16 の振幅は図 6.15 の振幅と同じであるが，ただ後者の光子の伝播関数がより複雑な表現

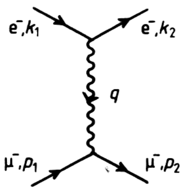


図 6.15　$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 過程の 1 光子交換図形

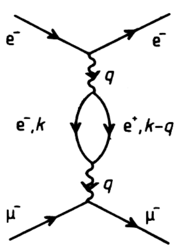


図 6.16　$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 過程の高次補正（真空偏極）．

$$-\frac{\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{q^2}\to(-1)\left(\frac{-\mathrm{i}}{q^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{i}e\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\not{k}-m}\mathrm{i}e\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\not{k}-\not{q}-m}\right)\left(\frac{-\mathrm{i}}{q^2}\right) \tag{6.190}$$

で置き換わっている．ここにkは泡の中の“閉線運動量”，mは電子の質量である．この表現は直ちに見分けられる特徴をいくつか示す．2つの因子 $-\mathrm{i}/q^2$ は両端の2つの光子に，$\mathrm{i}e\gamma$ 因子は光子と内線フェルミオンとの結合に対応し，フェルミオンの伝播関数が予想したように現れている．全体の前のマイナス符号はフェルミオンの閉線であるときいつもつけるが，その理由は場の量子論でしか説明できない．もちろん場の理論は，式(6.190) の中の因子の特別な順序(“閉線の向きに従う”)についても証明を与える(Bjorken-Drell, 1984, 8. 2節を参照)．

式(6.190)の中のk成分は無限大にまで及び，積分は発散することは明らかである．それは分子と分母の冪を勘定してみれば素直にすぐわかる．発散は図6.16からの寄与に限った特徴ではなく，閉線を含む大半の図形に無限大が現れる．繰り込みの処方（以下を参照）を遂行するためには，発散の正確な性質を同定し，意味のある有限な寄与を分離する首尾一貫とした方法がなくてはならない．ゲージ理論の文脈からいえば，もっとも普通の方法は“次元正規化”と呼ばれる(t′Hooft and Veltman, 1972)．この方法は非可換ゲージ理論(t′Hooft, 1971 a, b) の繰り込み可能性の証明や，これら諸理論による高次の計算を実行するとき，かけがえのない技法であることが確められた．しかしこの節の目的は読者にこのような計算を行う準備を与えることではなく，むしろ初等的な方法をとりわずかの数学だけ頼りに，繰り込みの物理を論ずることである．この目的のためには，“切断”（カットオフ)の方法で十分間に合う．このやり方では — 例えば式(6.190) の中の — 発散積分のkの大きい範囲からの寄与を有限の値Λ(最終的には無限大に近迫させなくてはならない)で切断する．すると発散はΛの値で同定できるであろう．スピンを持たない粒子を含む例は問題6. 13にある．

式(6.190)の場合は，積分はkが大きく$\sim\Lambda$になる範囲で(冪指数を勘定して) Λ^2のように発散するように見える．このような積分は“2乗発散”という．しかし実は，ほんとうの発散の程度は対数的に過ぎないことを示すことができる．あからさまな計算により図6.15からの寄与は（本質的ではない因子を除いて)

振幅

$$e^2\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)(-g^{\mu\nu}/q^2)\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p) \tag{6.191}$$

を与えるが，図 6.15 と図 6.16 の寄与を足し合わせると

$$e^2\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_2}\right)+X(q^2)\right]\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)\frac{-g^{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p) \tag{6.192}$$

になる．ここに X は q^2 の有限な関数で $q^2\to 0$ のとき 0 に近づくような有限な関数である（Bjorken-Drell，1964，8．2 節）．

式(6.192) で興味あるのは，最低次の式(6.191) と同じ一般形を持っていることである．特筆すべきはなお基本的な形

$$(\text{カレント})\times(\text{光子の伝播関数})\times(\text{カレント}) \tag{6.193}$$

に書けることである．ただし，式(6.191)に見合った電磁カレントの最低次の表現（式(6.42) 参照，規格化因子を省略）

$$\langle k'|\,j^\mu_{\text{em}}(0)\,|k\rangle=-e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k) \tag{6.194}$$

が式(6.192) の中では

$$\langle k'|\,\hat{j}^\mu_{\text{em}}(0)\,|k\rangle=-e\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+X(q^2)\right]^{1/2}\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k) \tag{6.195}$$

に置き換わっている（遷移カレント $p\to p'$ についても同様）．図 6.16の頂点のそれぞれに平等な補正を与えたことになるが，適正な取り扱いであろう．

この高次の寄与が，実効的には典型的なカレントの行列要素を式(6.194)から式(6.195)へ変えることとみなされる，という事実は次の段階で本質的な認識になる．あえて“電荷”とは何か，と問うてみよう．操作的には電荷はどう定義したらよいか．粒子の電荷は，電磁場の中のこの粒子の運動を観察して測ることができる．電磁場は外場であるかもしれないし，他の粒子の作る場であってもよい．これは原理的には量子力学などとはかかわりのない手順である．電荷は完全に古典的意味を持つ．これは，電荷の妥当かつ便利な定義はカレントの量子力学的表式の長波長極限（$q^2\to 0$）で得られるであろう，ということを示唆する．実は，これがまさしく前に電磁形状因子の議論（6．6 節，6．8 節）で電荷を定義した方法である．実際，式(6.195)は式(6.149)と同じ形を持っており，Dirac の“電荷”形状因子 $\mathscr{F}_1(q^2)$ が図 6.16 で表される特定の高次過程に結びつくあからさまな形で置き換えられている．すでに述べたように式(6.195)の中の

$X(q^2)$ は $q^2 \to 0$ で 0 に近迫するから，粒子の電荷は最低次の過程を記述するパラメーター e とみなすことはできず，図 6.16 で表される補正のため

$$e' = e\left[1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right]^{1/2} \tag{6.196}$$

の e' とみなさなくてはならないことがわかる．したがって図 6.16 の効果の少なくとも一部は，式(6.196) によって，電荷が e から e' に変わることである．特にこの効果を持つ部分は発散部分で，$X(q^2)$ を含む残りの部分は有限であり，さしあたり形状因子 $\mathscr{F}_1$ への寄与とみなすことができる．この点についてはすぐあとで立ち戻るつもりである．

理論の相互作用の実効的な強さが，相互作用の存在によって“自由空間”の値から変化する，という考えは固体物理ではなじみ深い，固体中の電子の電荷は，固体中の他の電子や格子イオンとの相互作用によって，“実効”値へ変化する．QED では式(6.196) に示すように，事情は 2 つの側面で異なっている．第一の点は，$\Lambda \to \infty$ によって補正は無限大になることである．式(6.196) の中の補正因子が 1 から大きく異なってくるのは，Λ がどんな値を実際にとるときであるか，ちょっと立ち止まって考えてみよう．答は明らかに，$\Lambda \ll m\exp(1/2\alpha) \sim 10^{26}$GeV までは何も起こらない．これは想像を絶する高エネルギーである．別の言い方をすればこの値は長さの尺度で $\hbar/\Lambda c \sim 10^{-27}$ fm である．このような巨大なエネルギーや無限小の距離まで QED の理論がなんらの修正なしに成立すると本当に信じられるであろうか．大多数の人はそうは考えない．例えば，量子重力効果を考慮しなくてはならない長さの尺度は Planck の長さ $l_P = (\hbar G_N/c^3)^{1/2}$ で与えられる．G_N は Newton の重力定数である．この値は $l_P \sim 10^{-20}$fm であって上の l_Λ の値より何桁も大きい．したがって式(6.196)の中の Λ の存在が真に重大になってくるより前に，何か新しい物理が介入してくるであろう．しかしながら，この事情の好転は決して偶然ではない．式(6.196)の中の補正が対数的に Λ^2 に依存するという事実にまさに基づいているからである．例えば補正が指数的であればこうはならない．この考察は繰り込み可能性の物理的内容について重要な洞察を与える．すなわち，繰り込み可能な理論は極めて短い距離におけるふるまいを知らなくても差し支えない理論である．

この見地に立てば，繰り込み可能性の重要性について違う面から理解するこ

とができる．ここでいっていることは次のようなことである．現在のエネルギーや長さの尺度で成り立つ物理は，もし理論が繰り込み可能であれば，かけ離れた尺度での物質のふるまいには関係しない．もしそうでなかったら極めて不安な事態に至っているであろう ― われわれが達し得る尺度でなんらか必要な計算を行うためには，およそ想像の及ぶ限りの微少距離まですべてのことが知られる日まで待っていなくてはならない．また“飼い慣らし”がどう進行すべきかも理解できる．物理学の他の分野では，あるエネルギーや長さの尺度で適切な計算を行うにあたり，その尺度の物理では計算できない少数個のパラメーターで微少距離でのふるまいを表してしまう，ということがしばしば行われる．例えば第1章で指摘したように，原子物理は核物理からかなり独立している．原子物理学者が普通原子核について必要とする一切の知見は，質量・電荷・スピンなどある全体的なパラメーターだけである．QED の場合も同様である．短距離でのあらゆる難点は少数個の有効パラメーター ― 電子の質量と電荷のような ― の中に取りまとめてしまうことができる，と望んでよいであろう．これらのパラメーターは現実に測定とかかわってくるのである．おそらく，これらのパラメーターを決定しているのは“凍結された”超微少距離の自由度であろうが，これはまた別の話である．

実は，このような考え方は，QED の状況が固体物理の類推とは異なる第二の側面から，ほとんど強制されたようなものである．QED では，固体の中の電子のように，その実効電荷を変えるような相互作用を与える媒質がないように一見思われる．しかし相対論的な量子力学では，真空における量子論的なゆらぎという特筆すべき可能性がある．図 6.16 の過程は，このような真空のゆらぎの典型的な一例である．2 つのレプトンの間で交換される光子は，真空から仮想的な電子・陽電子対を生成することができる．この対は“うたかた”の存在にすぎない．対の存在に必要なエネルギー $\Delta E \sim 2mc^2$ は $\Delta t \sim \hbar/2mc^2$ 程度の時間しか都合できず（いわゆるエネルギー・時間の不確定性原理），対はこの借りてきた時間の間だけ生きていられる．量子系のエネルギーを測る時間を Δt とするとき，量子系のエネルギーには $\Delta E \gtrsim \hbar/\Delta t$ のひろがりがある．したがって極めて短い時間の間には極めて大きいエネルギーのゆらぎがありうる．相対論的量子力学では，真空をあまり素朴に考えて“無”であると考えてはならない．粒

子が自由と考えられて真空中を伝播していても，(電荷のような)粒子を記述するパラメーターは，もとの一粒子ハミルトニアンに現れる値から，真空から生成される仮想粒子との相互作用効果を含む値に変わっているのである．この時点で次の点に言及しておくのがよい．弱い相互作用の理論やQCDの基本的な見地（ゲージ・ボソンの質量獲得や閉じ込めの問題）を理解するためには，真空のさらなる驚異的な性質が必要である．これらの点は第13章と第15章で取り扱う．

固体の中を伝播する電子は，それを固体の中から取り出して“自由空間”で観察することができる．したがって相互作用で修正された電子の有効電荷も自由空間の電荷も，それぞれ分離して実験的に定義できる．しかしながら，同じようにして相互作用のゆらぎの“外部”を相対論的な真空から実現することはできない．簡単にいえば，真空のすべてのゆらぎを受けないもともとの電子の電荷を実験的に同定することは意味をなさない．完璧に補正された電荷だけが実験的に測定可能である．式(6.196)は，観測にかからないもともとの電荷 e への特別な補正の形を与える．そこで e や Λ のことは忘れて e' を観測される電荷 e' と同定せよ，という示唆が与えられる．繰り込み可能性の奇跡は次のごとくである．理論を e' および実験からきまるほかのいくつかのパラメーターを用いて書き直してみると，Λ への依存性が消えてしまう．物理的に興味ある量はすべて $\Lambda\to\infty$ で有限となる．

どうしてそうなるか少し説明してみよう．はじめに，式(6.196)を少し一般化して

$$e_{\mathrm{R}}=e\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n c_n(\Lambda^2)\right) \tag{6.197}$$

とおく．e に対する可能な高次補正は無限個あるという事実をふまえ，e_{R} は完全に繰り込まれた電荷である．図6.16に戻り，q^2 の小さい値で正しい $X(q^2)$ のあからさまな形 (Bjorken-Drell, 1964) を用いて話を明確にする．この過程を図6.15の補正として取り入れた効果は

$$e^2\bar{u}\gamma_\mu u(-g^{\mu\nu}/q^2)\bar{u}\gamma_\nu u \tag{6.198}$$

を

$$e^2\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}+\mathrm{O}(\alpha^2)\right]\bar{u}\gamma_\mu u\frac{-g^{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}\gamma_\nu u \tag{6.199}$$

へ変えることにほかならない．しかし，式(6.196) を参照すれば

$$e_{\mathrm{R}}^2=e^2\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+\mathrm{O}(\alpha^2)\right] \tag{6.200}$$

であって，これを逆転すれば

$$e^2=e_{\mathrm{R}}^2\left[1+\frac{\alpha_{\mathrm{R}}}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+\mathrm{O}(\alpha_{\mathrm{R}}^2)\right] \tag{6.201}$$

とすることができる．式(6.201) を式(6.199) に代入すれば

$$e_{\mathrm{R}}^2\left(1-\frac{\alpha_{\mathrm{R}}}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}+\mathrm{O}(\alpha_{\mathrm{R}}^2)\right)\bar{u}\gamma_\mu u\frac{-g^{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}\gamma_\nu u \tag{6.202}$$

となり，これはこの桁で有限である．もちろんこれは自明と隣り合わせの簡単極まる例題であるが，本質的なことがらが含まれている．式(6.197) の中の $c_n(\Lambda^2)$ のあからさまな表現は，摂動論のある次数に寄与するすべての図形を考えて算出することができる．上の形の反転によって，物理的振動の無限大は，各次数ごとに，系統的に消去することができる．

今まで考察してきた図 6.16 のような特別な型の過程は，すでに見たように光子の伝播関数を変える効果があり，したがって以上の解釈によればレプトンの電荷を変えることになる．この補正を真空偏極の過程という．仮想対の効果は“試験体の”電荷の場によって対が分離し（偏極し），試験体粒子の有効電荷を弱めるからである．この議論は 9．3 節で更に拡張するが，すでに多くを語り過ぎたので，この場では式(6.202) に含まれる物理の重要なただ一部を指摘しておかなくてはならない．この形は q^2 が小さい ($q^2 \ll m^2$) ときに成り立ち，非相対論的極限で評価し Fourier 変換をすると（5．6 節参照）Coulomb の法則を短距離部分で修正することになる．そのため，Uhling (1935) によって最初に計算された水素状原子のエネルギー準位に 1 次の補正（偏位）が生ずることになる．水素ではこの効果は，およそ 1000 MHz の全 Lamb 偏位 ($2^2\mathrm{P}_{1/2}$ 状態と $2^2\mathrm{S}_{1/2}$ 状態のエネルギー差) のうち約 −27 MHz である．この効果は水素でも明瞭に観測できるが，ヘリウムのミューオン原子でははるかに大きく現れる．電子より重いミューオンの軌道は，電子軌道の～1/200 ほどになり原子核に近接するからである．初期の Lamb 偏位の測定は，場の量子論（特に QED）の発展のまたと

ない刺激となったのであった．Lamb 偏位の定性的議論は Aitchison (1985) にある．

もちろん，真空偏極の効果だけが無限大を生ずる過程ではない．ほかの一例は図 6.17 で，図 6.18 の最低次の Compton 散乱の図形の補正とみなしてよい．ここでは同じ粒子による放出・吸収が現れていることに注意する．これは 5．9 節ではじめて出あった特徴である．図 6.17 に対する振幅は再び，$\Lambda^2\to\infty$ のとき対数的に発散する部分を含むことが知られている．まことに驚くべきことには，この無限大は電子の質量の変化と結びつけられること，あたかも図 6.16 の無限大が電荷の変化と結びつけられるごとくである．一般に，電子の測定された質量 m_{R} は無限級数

$$m_{\mathrm{R}}=m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n d_n(\Lambda^2)\right) \tag{6.203}$$

で表せる．各項は $\Lambda^2\to\infty$ で発散するが，Λ^2 を有限に保っておけば摂動論で計算可能である．

再び固体物理では，粒子の質量は周囲の環境との相互作用の効果を受ける，とみなすことはごく自然である．QED の場合は，図 6.17 に例示するような電子

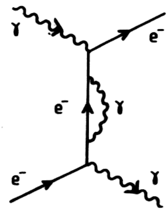


図 6.17　$\gamma e^-\to\gamma e^-$ 過程のフェルミオンの伝播関数に対する高次補正

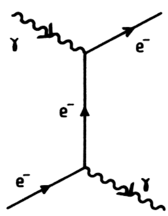


図 6.18　$\gamma e^-\to\gamma e^-$ 過程の最低次の図形

の伝播関数に及ぼす仮想的な相互作用が環境にあたる．こういう相互作用は粒子が外場に応答するしやすさに効果を及ぼし，したがってその慣性を変えるのである．しかし QED では，式(6.203) で表される質量は $\Lambda^2 \to \infty$ とともに発散する．電荷の繰り込みに用いたときと同様な反転の手法を用いて，摂動論で計算される振幅に現れる“裸の”質量 m を摂動の次数ごとに消去し，有限量 m_R で表すことができる．これを実行すると，ほかのたくさんの発散が直ってしまう．

さらに別種の発散は，波動関数の規格化の（無限大の）変化に関連していると同定することができる．しかし今特にそれらの点について詳論する必要はない．繰り込み可能な理論とは何を意味するか述べるときにきたからである．繰り込み可能な理論とは，有限個のパラメーター e_R，m_R，…を実験から採らなくてはならないが，(上に述べたような)反転手法を行うと摂動論から導かれるすべての振幅はこれらの物理的パラメーターを用いて表され，無限大はすべて除去されているような理論である．したがって相対論的量子力学では，e，m，……を e_R，m_R…でおきかえる方法が“再規格化(繰り込み)”であって，これによって物理的な振幅から無限大を追放するのである．

別の言い方をすれば，有限個のタイプの無限大しか繰り込み可能な理論には生じていない．それさえいやしてやれば摂動論のすべての次数ですべての発散が除去できるのである．無限大のタイプを同定し，無限大を実験から取った有限個のパラメーターの中に合体させると任意の図形の振幅が有限になるという証明が，繰り込み可能性の証明の内容である．これは高い秩序であって，QED の繰り込み可能性の証明(例えば Bjorken-Drell，1964，Begoliubov-Shirkov，1980 を参照)，非可換ゲージ理論†の繰り込み可能性の証明（自発的な破れのある場合は 't Hooft，1971 a，ない場合は 't Hooft，1971 b)はいずれも画期的な業績である．

一方繰り込み不能の理論とは，摂動論の各次数で新しいタイプの無限大が現れ，同じような手法ですべての無限大をいやそうとすると，必然的に実験から採る定数の数が無限に多くなってしまうような理論である．そうであれば理論の予言能力は極めて低くなる．またこのような定数の値がいくらになるか判断

†(原注)　概説として例えば Ryder (1985) と Collins (1984)．

し見抜く原理がないから，そのどれも先験的に除外することはできない．もちろん，これらのパラメーターを適当に選んで，すべてうまく出てくるように調節することはできるが，それは単にデータを適所に配したというに過ぎない．

弱い相互作用の繰り込み可能性の問題を論ずるには，発散のタイプの概念が重要になってくる．今まで述べた所では，発散の物理的意味は明らかになったとはいいがたい．実際，次に述べるような繰り込み過程の別の定式化の方が，あるいはわかりやすいかもしれない．物理的に解釈することは簡単であるが，今まで説明した方法は数学的に熟考するとあまり快適とは言えない．e，m，……で計算された振幅を e_R，m_R，……で書き直すところで，理論は裏返しになり，ぎこちない“摩擦”(Lautrap，1976) を起こす．別の方法では，はじめから摂動展開に現れるパラメーターはすでに物理的パラメーター e_R，m_R，……であるべしとこだわることであろう．まず手始めに電子の質量の問題を考えよう．第二の方法では摂動論は方程式

$$(i\not{\partial}-m_R+e\not{A}+\delta m)\psi=0 \tag{6.204}$$

に基づき，もとの

$$(i\not{\partial}-m+e\not{A})\psi=0 \tag{6.205}$$

に基づくのでない．式(6.204)の中で質量の変化 $\delta m=m_R-m$ を導入した．δm は“余分な相互作用”とみなすことができる．物理的な自由粒子の方程式は今や$(i\not{\partial}-m_R)\psi=0$ である．同様に，式(6.204)に現れるすべての量を，繰り込まれた等価量と δm のようないろいろな補正とに書き換えておかねばならない．

当然のことながらこの新しい摂動論で振幅を計算すると，前と同じ発散が出てくるであろう．しかし，今度は重要な違いがある．e，m，……を e_R，m_R，……で書き直したときに出る δm のような新しい項の寄与も取り入れなくてはならない．これら付加項の寄与は，実際は先験的に未知である（裸の電荷 e や裸の質量 m 自身がそうであるように）．繰り込み可能な理論とは，これらの補正項が，e_R に基づく新摂動論の各次数ごとに，すべての発散を消去するようにとることのできる理論である．これらの付加項は，“対立項”と呼ばれ，繰り込み可能な理論では有限個しかない．

この有限個の数がまさに発散の“タイプ”の数に対応する．この事情の物理は次のとおりである．利用することができる対立項はすべて，もともとの理論

を繰り込まれた項とその他の項（対立項）で書き直す過程で入ってくるだけである．すべての対立項は，質量・相互作用などもともとの理論の中にあった量に対応しなくてはならない．実はこれが意味のある理論であって勝手な対立項を付け加える自由度はない．もし付け加えれば，別の新理論を定義していることになろう．

この重要な点を新しい過程 $\gamma\gamma$ 散乱を例にして説明できる．$\gamma\gamma$ 散乱の最低次の寄与はすでに1閉線図形図 6.19 である．もとの理論の中に $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ という相互作用はないからである．古典的に言えば，光子の間に相互作用はない．この反応 — Delbruck 散乱 — は純粋に量子場の効果であって，閉線の中に見られる仮想的な e^+e^- 対から生ずるものである．(いつか大強度のレーザーを用いて理論の予言する断面積を検証できるかもしれない．) この図形は，電子の電荷と質量の繰り込みをしたあとでは有限になるべきである．無限大を吸収するように調節すべき対立項がないからである．実は，この項は最終的にはゲージ不変性に基づいて，有限である（例えば Itzykson-Zuber，1980，7．3．1 節参照）．一方，繰り込み不能の理論は理論とは言えない — 無限大があとからあとから現れるたびに，理論を再定義してゆかねばならないからである．

これがQEDの繰り込みに関して述べるべき結論である．数学的に長じた読者にとっても，より実際的な傾向を持つ読者にとっても，発散はすべて制御され“再定義して追放”できるという，甘い主張はいささか安易に過ぎると思われようが，むべなるかなである．最終的にはみかけ上無限の寄与を取り扱う繰り込みの手法に寄せるわれわれの信頼は，極めて実用的な基礎に立っているのである．すなわち繰り込まれたQEDが驚くべき精度で検証されているのである．

電子の磁気能率を例にとって，説明してみよう．自然単位系で磁気能率は

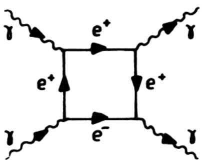


図 6.19　$\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ 過程の最低次の振幅

$$\mu = ge/4m$$

と書かれる．ここで e，m はそれぞれ電子の電荷と質量，g は電子の磁気回転比（または g 因子）である．電子に対する Dirac 方程式は摂動の最低次近似で，正確に $g=2$ と予言する．しかし，すでにハドロンの形状因子で論じたごとく，この結果は，たとえば図6.20に示してあるような“頂点の補正”を受け，仮想的な電磁相互作用によって修正されるであろう，と考えられる．電子の場合は仮想的な強い相互作用に依存する形状因子の場合に比べて，重要な違いが1つ出てくる．微細構造定数 α ではかられる電磁相互作用の強さは小さく，補正項を摂動論で計算することができ，その結果は十分信頼できるはずなのである．実際，“磁気異常” a を

$$g = 2(1+a) \tag{6.206}$$

で定義すれば，繰り込みを行ったQEDでは a の値を α/π の冪級数で表すことができる．

$$a = A(\alpha/\pi) + B(\alpha/\pi)^2 + C(\alpha/\pi)^3 + \cdots\cdots \tag{6.207}$$

図6.20は典型的な“2次”の図形（α/π の項）であり，図6.21は“4次”の図形（$(\alpha/\pi)^2$ の項）の1つを表す．寄与する図形はまた閉線の数によって分類することもできる．α の“次数”の半分が閉線の数になっている．したがって図6.21は

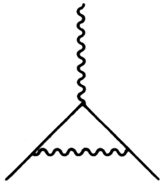


図6.20 電子・光子結合の頂点の補正．$g-2$ への2次の寄与

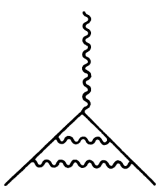


図6.21 $g-2$ への4次の寄与

2閉線図形である．

$\alpha/\pi \sim 2.3\times10^{-3}$ であるから，高次の次数からの寄与は非常に速やかに小さくなる（係数 A，B，C，……は1の程度の数であることがわかっている）．一方，a の値は実験的に超精密な値が求められている．最近の公表値（Van Dyck *et al*., 1987）は電子に対して

$$a(\mathrm{e}^-)_{\mathrm{exp}}=1159652188.4(4.3)\times10^{-12} \tag{6.208}$$

陽電子に対して

$$a(\mathrm{e}^+)_{\mathrm{exp}}=1159652187.9(4.3)\times10^{-12} \tag{6.209}$$

である．かっこの中の数字は実験値の不確定さ（誤差）である．数値(6.208）と(6.209）の一致は，荷電粒子のCPT不変性のもっとも強力な検証になっている．このような精密測定値に対抗するには，理論的予言値を8次（4閉線）の図形まで計算しなくてはならない．その実行に伴う膨大な複雑さの一端は，QEDの現状についてまとめたKinoshita and Sapirstein（1984）の総合報告の以下の引用からもうかがい知ることができる．

> 4閉線図形の補正を計算するのは極めて大がかりである．項点図形の代わりに自己エネルギーの図形を用いると，真空偏極の閉線を含まないもっとも重要な種類の図形の数を518から47に減らすが，それぞれの項の被積分関数は最高15,000個の項を含み，それらを10次元のFeynmanパラメーターの空間で積分しなくてはならない……(中略)．ここに提示する値はまだきわめて予備的なものであるが，それでもCDC 7600計算機の50日分の計算量に相当するものである．引用した誤差は統計的なもので……(中略)．巨大な平行処理機能を利用できるまで，本質的な進歩はあり得ない．

Kinoshita and Sapirstein（1984）に報告された値は，4閉線図形の計算値を含んで

$$a_{\mathrm{th}}=1159651941(128)(43)\times10^{-12} \tag{6.210}$$

である．かっこの中のはじめの数字は，α を決める（Josephson効果を用いる）ときの実験的誤差で，次の数字は数値計算の精度を表す．著者が指摘しているように，理論値(6.210）と実験値（6.208），（6.209）の間に2-標準偏差の違いが

あることは，QED にとって深刻な問題を示唆しているのかもしれない．あるいは，Josephson 効果から α の値を引き出すことはこの精度の話としては信頼できないのかもしれない．理論と実験との間のこの記念碑的な対立は今後も続くことは疑いない．これは，まったく“低エネルギー”領域の物理の超精密測定が，“高エネルギー”領域の最前線に深刻な衝撃を与えうる，という古典的な好例である．これからこういう事情が増えるであろう．何はともあれ，QED を“われらが持てる最良の理論”と呼ぶのもむべなるかなである．

まとめ

(1) 電子と電磁場との相互作用に関する 1 次の摂動論：ベクトル・ポテンシャルと遷移カレント．
(2) 最低次の $e^-\pi^+$ 散乱の Feynman 図形と振幅．
(3) スピン総和の対角和（跡）の技法．
(4) 2 体散乱断面積のあからさまな計算．
(5) パイオンの形状因子を例とする形状因子の概念．
(6) パイオン形状因子のパラメーター化を規制する Lorentz 不変性とカレント保存則．
(7) 最低次の $e^-\mu^-$（2 つの点フェルミオン）散乱．
(8) e^-p 散乱と核子の形状因子：Lorentz 不変性とカレント保存則に従うパラメーター化．
(9) e^-p 弾性および非弾性散乱の運動学．
(10) 電子の Compton 散乱とフェルミオンの伝播関数．
(11) 繰り込みと QED の予言の精度．

問題

6. 1 (a) 4 成分スピノール ψ が体積 V の箱の中で条件

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger\psi = 2E \tag{6.1.1}$$

によって規格化されているとき，式

$$\psi=N\begin{pmatrix}\phi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi\end{pmatrix}e^{-ip\cdot x} \tag{6.1.2}$$

の中の ψ の規格化定数 N を求めよ．

(b)　$E>0$ のとき正エネルギーのスピノール $u(p,\ s)$ を

$$u(p,\ s)=(E+m)^{1/2}\begin{pmatrix}\phi^s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix} \tag{6.1.3}$$

で定義する．$u(p,\ s)$ の満たす方程式を見いだし，γ 行列の記法で書け．また共役スピノール $\bar{u}(p,\ s)$ は方程式

$$\bar{u}(p,\ s)(\not{p}-m)=0 \tag{6.1.4}$$

を満たすことを示せ．

(c)　負エネルギーのスピノール $v(p,\ s)$ および $\bar{v}(p,\ s)$ に対して上と類似した方程式を導け．ただし $v(p,\ s)$ を

$$v(p,\ s)=(E+m)^{1/2}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^s\\ \chi^s\end{pmatrix} \tag{6.1.5}$$

で定義する．

6. 2　(a)　任意の行列 **A**，**B** について次の結果を示せ．

$$(\mathbf{AB})^\dagger=\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger \tag{6.2.1}$$

ただし行列 **M** に対してそのエルミート共役を

$$(\mathbf{M}^\dagger)_{ij}=\mathbf{M}_{ji}{}^* \tag{6.2.2}$$

で定義する．

(b)　行列

$$\alpha=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\quad\beta=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}=\gamma^0 \tag{6.2.3}$$

はエルミート的（すなわち $\mathbf{M}=\mathbf{M}^\dagger$）であることを示せ．また行列 $\boldsymbol{\gamma}$ は反エルミート的（すなわち $\mathbf{M}=-\mathbf{M}^\dagger$）であることを示せ．

(c)　任意の γ 行列 Γ に対して，行列 $\bar{\Gamma}$ を次の行列積で定義する．

$$\bar{\Gamma}\equiv\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{6.2.4}$$

このとき（i）$\bar{\gamma}^\mu=\gamma^\mu$，（ii）$\overline{(\mathrm{i}\gamma_5)}=\mathrm{i}\gamma_5$ であることを示せ．ただし $\gamma_5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ である．

(d)　行列 $\sigma^{\mu\nu}$ を

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{i}[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu] \tag{6.2.5}$$

で定義するとき，$\overline{\sigma^{\mu\nu}}$ を求めよ．

6. 3　(a)　γ 行列の反可換関係

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{6.3.1}$$

を用いて，任意の 4 元ベクトル a，b について次式が成立することを示せ．

$$\not{a}\not{b}=-\not{b}\not{a}+2a\cdot b\mathbf{1} \tag{6.3.2}$$

(b)　$k^2=m^2$ であれば

$$(\not{k}+m)(\not{k}-m)=(\not{k}-m)(\not{k}+m)=0 \tag{6.3.3}$$

が成り立つことを示せ．この結果を用いて，4 行 4 列の行列

$$\Lambda_+(k)=\not{k}+m \tag{6.3.4}$$

を任意の 4 成分スピノール ψ にかけると，その正エネルギー成分のみが得られることを示せ．同様に，行列

$$\Lambda_-(k)=\not{k}-m \tag{6.3.5}$$

は ψ をその負エネルギー成分に射影することを示せ．

(c)　スピノール $u(k,\ s)$ のあからさまな形を用いて，行列積

$$\sum_s u(k,\ s)\bar{u}(k,\ s) \tag{6.3.6}$$

のスピン和を計算し，結果を 4 行 4 列の行列で書け．それを行列 $(\not{k}+m)$ と比較せよ．

6. 4　(a) 任意の行列 **A**，**B**，**C**，**D** について次式を証明せよ．

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{ABCD})=\mathrm{Tr}(\mathbf{DABC})=\mathrm{Tr}(\mathbf{CDAB})=\mathrm{Tr}(\mathbf{BCDA}) \tag{6.4.1}$$

(b)　付録 D にまとめられている γ 行列の対角和の公式を用いて，レプトン・テンソル

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\not{k}'+m)\gamma_u(\not{k}+m)\gamma_\nu] \tag{6.4.2}$$

を計算せよ．$q^2=(k-k')^2$ を定義し，$k^2=k'^2=m^2$ に注意してこの結果が

$$L_{\mu\nu}=2[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+(q^2/2)g_{\mu\nu}] \tag{6.4.3}$$

と書けることを示せ．

6.5　偏りを考えない $e\pi$ 散乱に対しては，“縮約” $T^{\mu\nu}L_{\mu\nu}$ を計算する必要がある．$L_{\mu\nu}$ は問題6.4に現れているレプトン・テンソルで，$T^{\mu\nu}$ は

$$T^{\mu\nu}=(p+p')^{\mu}(p+p')^{\nu} \tag{6.5.1}$$

である．ただし $p'=p+q$ が成り立つ．$L_{\mu\nu}$ のあからさまな表式を用いて，

(a)　次式を示せ．

$$q^{\mu}L_{\mu\nu}=q^{\nu}L_{\mu\nu}=0 \tag{6.5.2}$$

(b)　縮約 $T^{\mu\nu}L_{\mu\nu}$ を行うときにこの結果を利用して計算を行い，結果が

$$T^{\mu\nu}L_{\mu\nu}=8[2(k\cdot p)(k'\cdot p)+(q^2/2)M^2] \tag{6.5.3}$$

と書けることを示せ．ここで M はパイオンの質量である．実験室系の断面積を計算する残りの作業は，付録Eに詳しく述べてある．

6.6　(a)　実験室系 $p^{\mu}=(M,\mathbf{0})$ における，スピンで平均した，最低次の $e\mu$ 散乱微分断面積を導け．M はミューオンの質量である．結果は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{ns}}[1-(q^2/2M^2)\tan^2(\theta/2)] \tag{6.6.1}$$

と書けることを示せ．ここで“無構造”断面積は $e\pi$ 散乱の断面積（付録E）であり，いつものように電子の質量を無視した．

(b)　すべての質量を無視して（超高エネルギーの極限），不変振幅の2乗 $|\overline{F}|^2$ を s，t，u 変数で表せ．関係式

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{16\pi s^2}|\overline{F}|^2 \tag{6.6.2}$$

を用いて，$e\mu$ 散乱断面積は次の形に書けることを示せ．

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\frac{1}{2}\left(1+\frac{u^2}{s^2}\right) \tag{6.6.3}$$

さらに変数 y を実験室系の変数により $y=(k-k')/k$ で定義すれば，この結果は次のように表せることを示せ．

$$\frac{d\sigma}{dy}=\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}s\frac{1}{2}[1+(1-y)^2] \tag{6.6.4}$$

6.7　重心系における過程 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ を考える．

(a)　最低次の Feynman 図形を描き，対応する振幅を書き下せ．

(b)　スピンについて平均した行列要素の2乗は，次の形をしていることを

示せ.

$$|\bar{F}|^2=\frac{(4\pi\alpha)^2}{Q^4}L(\mathrm{e})_{\mu\nu}L(\mu)^{\mu\nu} \tag{6.7.1}$$

ここに Q^2 は重心系における全エネルギーの 2 乗である.

(c) レプトンの質量をすべて無視して，対角和を求め，縮約を行い，その結果が

$$|\bar{F}|^2=(4\pi\alpha)^2(1+\cos^2\theta) \tag{6.7.2}$$

となることを示せ. θ は重心系の散乱角である.

(d) 全弾性散乱断面積は

$$\sigma=4\pi\alpha^2/3Q^2 \tag{6.7.3}$$

で与えられることを示せ.

6. 8 $\sigma^{\mu\nu}$ として問題 6.2 (d) に定義された量を用い，$q=p'-p$ とおいて次の表式を考える.

$$\bar{u}(p')\mathrm{i}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2M}q_\nu u(p) \tag{6.8.1}$$

Dirac 方程式と γ 行列の性質を用い，カレントの “Gordon 分解”

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)=\bar{u}(p')\left(\frac{(p+p')^\mu}{2M}+\mathrm{i}\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2M}\right)u(p) \tag{6.8.2}$$

を証明せよ.

6. 9 本質的でない因子を省略すれば，図 6.14 (a) の振幅は (5. 6 節参照)

$$\sum_s u(q_1,\ s)\bar{u}(q_1,\ s)/[E_k+E_p-(E_k+E_n+E_{k'})]\cdot 2E_n$$

である. ここに $q_1=(E_n,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')$, ${E_n}^2=[m^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')^2]$である. 同様に図 6.14 (b) の振幅は 3. 5. 3 節のマイナス符号を考慮して

$$-\sum_s v(q_2,\ s)\bar{v}(q_2,\ s)/[E_k+E_p-(E_p+E_{p'}+E_n)]\cdot 2E_n$$

である. ここに $q_2=(E_n,\ \boldsymbol{k}'-\boldsymbol{p})$ である. これら 2 つの振幅の和は

$$(\not{q}+m)/(q^2-m^2)$$

と書けることを示せ. ただし $q=(E_p-E_{k'},\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')$ である.

6. 10 ε_μ を k_μ で置き換え，また ε_ν^* を k'_ν で置き換えると式(6.175) の中の振幅 $F_{\gamma\mathrm{e}}$ は 0 となることを示せ.

6. 11 (a) 電子の Compton 散乱のスピンで平均した振幅の 2 乗は干渉項

$$\sum_{\lambda,\lambda',s,s'} F^{(\mathrm{d})}_{\gamma\mathrm{e}} F^{(\mathrm{e})*}_{\gamma\mathrm{e}} \tag{6.11.1}$$

を含む．ここに $F^{(\mathrm{d})}$，$F^{(\mathrm{e})}$ は式 (6.176)，(6.177) で与えられる．この項に対して式 (6.180) に相当する表式を求め，実は干渉項が 0 になることを示せ．（ヒント，関係式 (D.4)，(D.5) を用いよ．）

(b)　スピン和

$$\sum_{\lambda,\lambda',s,s'} F^{(\mathrm{e})*}_{\gamma\mathrm{e}} F^{(\mathrm{e})}_{\gamma\mathrm{e}} \tag{6.11.2}$$

は式(6.185) の中で s と u を入れ換えた式で表されることを示せ．

6. 12　問題 6.11 (a) の干渉項を $k^2=-Q^2$ の場合に計算し直せ．こうして式 (6.189) を導け．

6. 13　発散する“閉線”積分の簡単な一例として式(6.190) の中の d^4k積分を考える．ただしフェルミオンの伝播関数をスピン 0 の粒子の伝播関数で置き換え，本質的な部分は

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2)} \frac{1}{[(k-q)^2-m^2]} \tag{6.13.1}$$

とする．これを次の手順で計算せよ．

(a)　恒等式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha}{[(1-\alpha)A+\alpha B]^2} \tag{6.13.2}$$

を証明せよ．

(b)　この結果を d^4k 積分に応用すれば

$$\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\{(1-\alpha)(k^2-m^2)+\alpha[(k-q)^2-m^2]\}^2} \tag{6.13.3}$$

となる．この積分は

$$\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-\alpha q)^2+\alpha q^2-\alpha^2 q^2-m^2]^2} \tag{6.13.4}$$

に帰着することを示せ．積分変数を $k-\alpha q$ に変え，積分は

$$\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2-\Delta]^2} \tag{6.13.5}$$

となることを示せ．ただし $\Delta=m^2+\alpha^2 q^2-\alpha q^2$

(c)　d^4k 積分とは $\mathrm{d}k^0\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$ を意味し，$k^2=(k^0)^2-\boldsymbol{k}^2$ である．$k^0=\mathrm{i}\boldsymbol{x}^0$ とおき(正しい手法ではあるがここで証明は行わない)，

$$i\int_0^1 d\alpha \int \frac{d\boldsymbol{x}^0 d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(\boldsymbol{x}^0)^2+\boldsymbol{k}^2+\Delta]^2} \tag{6.13.6}$$

を計算する．これはもはや 4 次元 Euclid 空間（d^4k は Minkowski 空間の積分であった）の積分であるから球座標の 4 次元的類推を用いることができる．長さの 2 乗 $(\boldsymbol{x}^0)^2+\boldsymbol{k}^2$ が入っているから，角積分について考慮する必要はない（定数がかかるのみ）．積分は

$$\int_0^1 d\alpha \int \frac{\boldsymbol{x}^3 d\boldsymbol{x}}{[\boldsymbol{x}^2+\Delta]^2} \tag{6.13.7}$$

に比例し，$\boldsymbol{x}=[(\boldsymbol{x}^0)^2+\boldsymbol{k}^2]^{1/2}$ は（x^0, $\boldsymbol{k}$）の 4 次元的な長さである．変数を $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}^2$ に変換して $\boldsymbol{u}$ 積分は

$$\int_0^\infty \frac{u\,du}{(u+\Delta)^2} \tag{6.13.8}$$

となる．発散の程度を調べるため，積分の上限を“切断” Λ^2 で置き換え，

$$\int_0^{\Lambda^2} \frac{u\,du}{(u+\Delta)^2} = -1+\frac{\Delta}{\Lambda^2+\Delta}+\ln\left(\frac{\Lambda^2+\Delta}{\Delta}\right) \tag{6.13.9}$$

となることを示し，$\Lambda^2 \to \infty$ のとき積分は対数発散であることを導け．

この発散の程度は u の大きくなるところで $(u+\Delta)^2 \simeq u^2$ であるから積分は $\int du/u \sim \ln u$ のようなふるまいをする，と考えてよいことに注意せよ．もし u の冪がもう 1 つ分母にあれば，積分は収束して $\int du/u^2$ のようになるであろう．もし u の冪が 1 つ分母に少なければ，積分は $\int^{\Lambda^2} du \sim \Lambda^2$ のようになって発散は“2 次”であろう．一般にこのような閉線振幅の発散の程度は，$\int d^4k$ 積分に戻り分母と分子の k の冪を“数えて” — d^4k は 4 次の冪と数える — 知ることができる．分子と分母の冪の差を $d>0$ とするとき，発散は Λ^{2d} の程度であると期待される．$d=0$ ならば対数的である．しかしこの簡単な規則は成り立たないときもある．$d<0$ であれば積分は収束する．

6. 14 (a) 本文の式(6.148) を導け．

(†) 本文の式(6.153)，(6.154) を導け．

---

†(訳注) この問題は原著にはないが，Rosenbluth 断面積の理解に資するため付け加えた．

第7章 深非弾性電子・核子散乱とクオーク・パートン模型

いままで，量子電磁力学におけるスピン0と1/2の粒子の簡単な過程を計算するため，いろいろな規則を学び，多くの実例を考察した．ここから直ちにほかのタイプの相互作用，すなわち本書の関心の的である弱い相互作用と強い相互作用の議論にうつることもできるかもしれない．しかしその前に，素粒子物理学の核心に触れる重要な問題 ― 深非弾性電子散乱によってあらわにされたハドロンの構造 ― に関して，簡単ではあるが初等的な解説を行おう．(同じように重要なニュートリノ散乱の実験は，11．2節に論じてある．) この問題をとりあげるひとつの理由は，必要な計算が簡単で示唆に富み，すでに学んだ規則の実用的な好例題になっているからであるが，さらに特別な理由は，ハドロンの中に点状の構成粒子 ― クオーク(構成子) ― が存在するというまぎれもない証拠が，深非弾性散乱の計算と実験との比較から得られるからである．クオークの相互作用は，本書の後半で論ずるように，ゲージ理論で記述されると信じられている．

7．1 非弾性 ep 散乱．運動学と構造関数

運動量移行が大きくなると，弾性散乱はほとんどなくなってしまう．終状態に電子と陽子ばかりでなく，もっとほかの粒子を含む非弾性過程が，ずっと起こりやすくなる．測定すべきもっとも簡単な非弾性断面積は，いわゆる“包含”断面積である．この実験では，終わりの状態の電子しか観測しない．したがってこの断面積は，すべての可能なハドロンの終状態に対応する断面積の総和である．陽子の頂点で生成されたハドロンの残がいから，何か特定の状態をひとつ選び出そう，とすることはまったく意図していない．1光子交換の振幅が主要であると仮定すれば，この過程は図7.1の図形で表される．陽子の頂点の“丸”は，詳しい構造がわかっていないことを示し，X はあらゆる可能なハドロン終

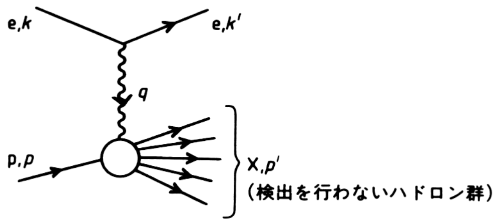


図 7.1　1 光子交換の近似による電子・陽子非弾性散乱

状態の総和を表す．しかし，1 光子交換の仮定(実験的には非常に良い近似であることがわかっている）により，すでに論じた例題同様（式(6.69)，式(6.122) 参照)，断面積は，レプトン・テンソルとハドロンの頂点を記述するテンソルとの縮約された形に，因数分解されるはずである．

$$\mathrm{d}\sigma \sim L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}(q,\ p) \tag{7.1}$$

レプトン頂点は QED で正しく記述され，以前の諸例と同じ形をとる．

$$L_{\mu\nu} = 2[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + (q^2/2) g_{\mu\nu}] \tag{6.88}$$

一方，ハドロンのテンソルについては，強い相互作用が重要な役割を果たすと考えられ，既出の強力な不変性の議論に基づいて，その一般的構造を導いてこなくてはならない．ここでは偏りを考えない散乱だけを考えよう．したがって初めの状態の陽子のスピンについて平均を行う．終わりの状態 X に関する和は，全運動量 p' を持つハドロン状態のひとつひとつについて，あらゆる可能な量子数に及ぶ．包含断面積に関しては，終わりの相空間は散乱された電子だけを含む．さらに，X の特定の状態を拾い上げる散乱過程に限ってはいないのだから，終わりの電子のエネルギー k' および散乱角 θ は，いまや独立な変数である．$W^{\mu\nu}(q,\ p)$ の中で X に関する和は，X が運動量 p' を持つことを保証する(4 次元運動量保存を表す）いつもの δ 関数で制約され，この制約下にあるあらゆるハドロン状態の相空間を含む．慣習上の因子を含んで，$W^{\mu\nu}(q,\ p)$ を次の式で定義する（問題 7．1 参照）．

$$e^2 W^{\mu\nu}(q,\ p) = \frac{V}{4\pi M}\frac{1}{2}\sum_s \sum_X \langle \mathrm{p}\ ;\ p,\ s\,|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{X}\ ;\ p'\rangle\langle \mathrm{X}\ ;\ p'\,|\,\hat{j}^{\nu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{p}\ ;\ p,\ s\rangle \times (2\pi)^4 \delta^4(p+q-p') \tag{7.2}$$

$W^{\mu\nu}$ のテンソル構造をどのようにパラメーター化したらよいであろうか．いつものように，Lorentz 不変性とカレントの保存則が手助けになる．しかし弾性散乱の形状因子の場合に比べて，重要な違いが1つある．包含非弾性散乱の場合は，2つの独立なスカラー量が存在する．関係式

$$p' = p + q \tag{7.3}$$

から，M を陽子質量として

$$p'^2 = M^2 + 2p\cdot q + q^2 \tag{7.4}$$

が成り立つ．非弾性散乱の場合は，ハドロンの終状態の不変質量

$$p'^2 = W^2 \tag{7.5}$$

は変数であって，ほかの2つのスカラー変数

$$p\cdot q = M\nu \tag{6.161}$$

$$q^2 = -Q^2 \tag{7.6}$$

と（式(6.162) 参照），次の関係で結ばれている（式(6.168) 参照）

$$2M\nu = Q^2 + W^2 - M^2 \tag{7.7}$$

不変性の議論により，弾性 ep 散乱と同じテンソル構造が得られ，関数 $A(q^2)$, $B(q^2)$ は“構造関数”で置き換えられるが，構造関数は2つの変数の関数である．変数は普通 ν と Q^2 を取る．陽子の構造関数 W_1, W_2 の通常の定義は

$$\boxed{\begin{aligned}W^{\mu\nu}(q,\ p) =& (-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu/q^2)\,W_1(Q^2,\ \nu)\\ &+ [p^\mu - (p\cdot q/q^2)q^\mu][p^\nu - (p\cdot q/q^2)q^\nu]M^{-2}W_2(Q^2,\ \nu)\end{aligned}} \tag{7.8}$$

で与えられる．

フラックスの因子と終状態の電子の相空間を代入して計算すると，非弾性電子・陽子散乱の包含微分断面積として次の表式が得られる（問題7．1）．

$$d\sigma = \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 \frac{1}{4[(k\cdot p)^2 - m^2M^2]^{1/2}} 4\pi M L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \frac{d^3k'}{2\omega'(2\pi)^3} \tag{7.9}$$

“実験室系” の変数を用い，電子の質量の効果を無視すれば，断面積は

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d\Omega dk'} = \frac{\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}[W_2\cos^2(\theta/2) + 2W_1\sin^2(\theta/2)]} \tag{7.10}$$

となる（問題7．2参照）．非弾性散乱に対しては $\cos\theta$ と k' は独立な変数であることを思い起こせば，偏りを考えない断面積に方位角に関する軸対称性を仮

定して，変数を $\cos\theta$ と k' から Q^2 と ν に変換することができる．

$$Q^2=2kk'(1-\cos\theta) \tag{7.11}$$

$$\nu=k-k' \tag{7.12}$$

が成立するから

$$\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}k'=\frac{1}{2kk'}\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu \tag{7.13}$$

が得られて，断面積は次の式で表される．

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}=\frac{\pi\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}\frac{1}{kk'}[W_2\cos^2(\theta/2)+2W_1\sin^2(\theta/2)]} \tag{7.14}$$

時にはこの変数のかわりに，次の変数が用いられる．

$$x=Q^2/2M\nu \tag{7.15}$$

$$y=\nu/k \tag{7.16}$$

変数 x の意義は次節で詳しく論ずる．変数 y は“実験室”系におけるエネルギー移行の割合である．変数の組 Q^2，ν から，変数の組 x，y へ変換するときのヤコビアンは

$$\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu=2Mk^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.17}$$

である（問題 7. 2 参照）．以上の諸式，特に式(7.8)，(7.10)，(7.14) ははじめの 1 光子近似を受け入れる以上，まったく一般的であることを強調しておく．物理はすべて，2 つの構造関数 W_1，W_2 の ν および Q^2 の依存性の中に含まれている．

先験的には非弾性散乱は複雑な過程であると考えられ，構造関数 W_1，W_2 は ν や Q^2 の関数としてその複雑さを反映している．しかし，1969 年 Bjorken は，“深非弾性領域”（ν および Q^2 は大きいが比 Q^2/ν が有限である領域）においては構造関数はきわめて簡単なふるまいをすべきことを予言した．構造関数は比準化（スケール）すること，すなわち Q^2 と ν の独立な関数ではなく，その比 Q^2/ν のみの関数となることを予言したのであった．近代的なパートン・クオーク模型が発展してきたのは，まさしくこの近似的な“Bjorken スケーリング”が検証されたからであった．したがって，ここの非弾性散乱の議論も，深非弾性領域に限ることにしよう．

7. 2　Bjorken スケーリングとパートン模型

Gell-Mann のクオーク模型の流れ代数（総合報告として Adler & Dashen (1968) がある）的考察に基づいて，Bjorken は次の“スケーリング仮説”を提出した．すなわち

$$x=\frac{Q^2}{2M\nu}\text{ を一定に保ったまま }\left.\begin{matrix}Q^2\to\infty\\ \nu\to\infty\end{matrix}\right\} \tag{7.18}$$

の極限において，構造関数は

$$MW_1(Q^2,\ \nu)\to F_1(x) \tag{7.19 a}$$

$$\nu W_2(Q^2,\ \nu)\to F_2(x) \tag{7.19 b}$$

のように“スケーリング”する．強調しなくてはならないことは，Bjorken の仮説の物理的内容は，関数 $F_1(x)$，$F_2(x)$ が有限であるということである†．

この予言が実験的に支持されたこと（図 7.2 参照）により，まず Bjorken の議論の理論的基礎が検討され，ついでクオーク・パートン模型の与える簡単で直観的な物理像の定式化が行われたのであった．図 7.2 (*a*) を綿密に吟味すれば，実は x のどんな値に対しても，わずかではあるが有意のデータの広がりがあるという（正しい）疑惑を持つに至る．にもかかわらずスケーリングはデータのもっとも直接的な粗い特徴であり，それを理解するのは基本的に重要である．簡単なスケーリングのふるまいの破れは QCD によって予言できるが，のち，第 9 章でその方法の手ほどきを行う．

スケーリングをどのように理解できるであろうか．Feynman は，Bjorken の議論を解説するにあたって，陽子の内部に“パートン（部分子）”と名づける点状の素子が存在し，それが電子と弾性散乱を行う，という直観的な説明を与えた．この説明の精髄は，点状のパートンによる電子の弾性散乱の運動学にある．したがって，パートン模型の結果を，前章の結果から導き出すことができる．Q^2，ν が大きい領域では，仮想光子が陽子内部のきわめて短い距離と時間の尺

---

†(原注)　$W(Q^2,\nu)=f(x,Q^2)$ とおいて，x を固定し $Q^2\to\infty$ の極限をとれば，$f(x,Q^2)$ がある関数 $F(x)$ に近迫することはいつも可能である．しかし，$F(x)$ は 0 にでも有限にでも無限大にでもなり得る．この極限で $F(x)$ は有限に止まる，というのがスケーリング仮説の主張であり，ここに物理の内容が含まれている．

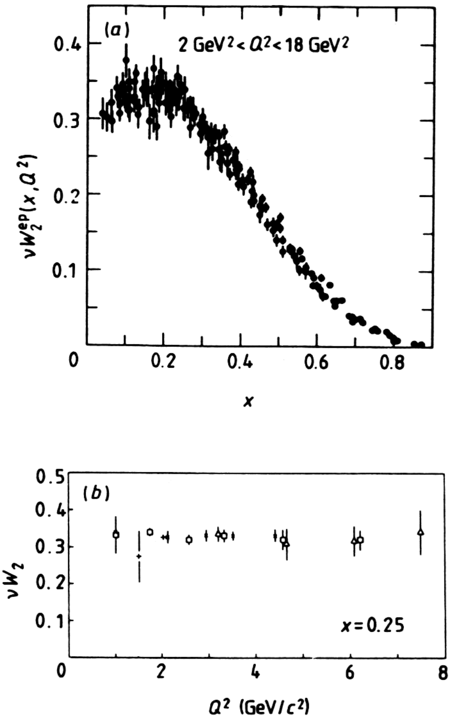


図 7.2 Bjorken のスケーリング．構造関数 νW_2 を (a)ではいろいろな Q^2 の値に対して x の関数として描き (Attwood, 1980)　(b)では x の 1 つの値 $x=0.25$ に対して Q^2 の関数として描いた (Friedman and Kendall, 1972)

度を探っている，ということは直観的に納得できる．(事実，スケーリングの諸問題に対して，光円錐上の演算子と短距離の演算子積を用いる方法があるが，これはその思想的基礎である．)光子は，陽子のエネルギーと運動量のある一部分 y だけを担う小さな(点状の)構成素子と相互作用をする，と Feynman は考えた (図 7.3 参照)．大量のエネルギー移行 ν を起こすような短い時間尺度の間では，衝突された素子はおそらく実効的に自由として取り扱うことができる．とすれば図 7.4 に示すような理想化された弾性散乱過程を考えればよい．パートンに対する弾性散乱の条件が直接に Q^2 と ν の関係を導き，したがって観測

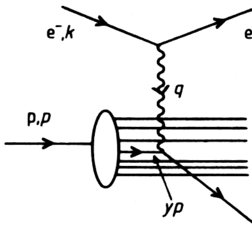


図 7.3　光子・パートン相互作用

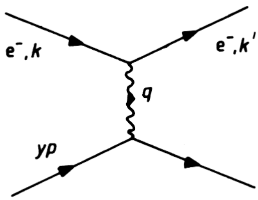


図 7.4　電子・パートン弾性散乱

にかかるスケーリングのふるまいが説明されるのである．パートン模型の最初の考察では，陽子の運動量が無限大になる座標系で論じられた．この座標系では，パートンの質量その他をあからさまに用いる必要のない利点があるが，スケーリングの簡単な運動学的起源をあいまいにしてしまう難点もある．この理由からいささか理論的な美しさを犠牲にして，前章の計算例と密接な類推をとりつつ，電子・パートン散乱を直接に計算することにしよう．

はじめに，部分比 y は Bjorken の変数 x にほかならないことを示す．種類 i のパートンについて

$$p_i^\mu \approx y p^\mu \tag{7.20}$$

と書く．あらく言えば†パートンは質量

$$m_i \approx yM \tag{7.21}$$

†(原注)　パートンの横運動量や質量に関する式(7.20)，(7.21) のようなあからさまな関係式は，厳密な取り扱いでは不必要である．このような量はスケーリングの主要でないふるまいを与えることが証明されている (Sachrajda, 1983)．

を持つ，と考えることができる．このとき式(6.156)，(6.157) とまったく同様にして，パートン頂点におけるエネルギーと運動量の保存，および衝突したパートンが質量殻の上に止まるという仮定（図 7.4 でパートンは自由であるという仮定）によって

$$(q+yp)^2=m_i^2 \tag{7.22}$$

が成り立ち，式(7.6)，(6.161)，(7.21) を考慮すれば

$$y=Q^2/2M\nu\equiv x \tag{7.23}$$

となる．したがって核子の構造関数が 1 つの変数 x だけに（よい近似で）依存するように実際見えるという事実は，物理的には，散乱が図 7.4 に示すような“ほぼ自由な”パートンと電子の衝突を介して優先的に起こる，と解釈される．

x のどのような値が予想できるであろうか．電子の重陽子による散乱の類推で考えよう．標的（重陽子）は疑いもなく複合粒子で，その素子（“パートン”）は第一近似で 2 つの核子そのものである．$m_N\sim 1/2m_D$ であるから，$x\sim 1/2$(式(7.21)参照)が成り立ちやすいと期待される．ここで $x=1$ であれば重陽子全体からの弾性散乱にあたるであろう．e^-d 準弾性散乱では，$x\sim 1/2$ に実際山が観測されている(図 7.5)．（山が広がっているのは構成要素の核子が重陽子のなかで運動しているからである．）それでは核子そのものについてはどうであろうか．重陽子との類推に基づけば，簡単な 3 クォーク模型では $x\sim 1/3$ に山があると考えられるが，図 7.2(*a*) に示したデータからはそうは読み取れない．おそらく何かほかのものも存在するのである — それが何かはこれからの話の進行とともに明らかになる．

核子は簡単な複合模型（1. 2. 3 節参照）で導入されたたぐいのクォーク（および反クォーク）を<u>少なくとも</u>いくつか含むであろう，と考えることは確かに意義あることである．クォークがスピン 1/2 を持つと仮定すれば，電子がタイプ i，電荷 e_i(電気素量を単位として)のクォークあるいは反クォーク — 一般に<u>パートン</u> — から散乱される断面積は，式(6.167)の $e\mu$ 散乱の断面積に自明な修正を行って

$$\frac{d^2\sigma^i}{dQ^2d\nu}=\frac{\pi\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}\frac{1}{kk'}\left(e_i^2\cos^2(\theta/2)+e_i^2\frac{Q^2}{4m_i^2}2\sin^2(\theta/2)\right)\times\delta(\nu-Q^2/2m_i) \tag{7.24}$$

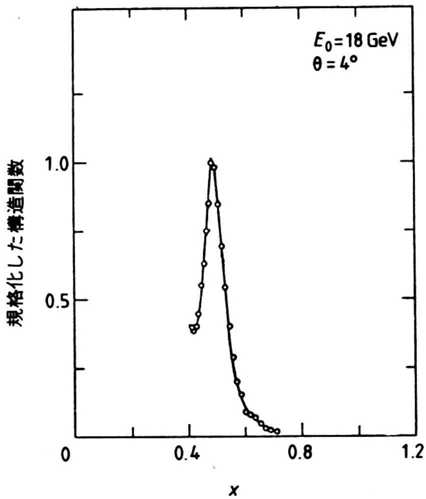


図 7.5　e^-d 準弾性散乱における構造関数を x に対して描いた図（Attwood, 1980）

で与えられる．これを，構造関数 W_1, W_2 を用いた一般的な包含反応の断面積

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2d\nu}=\frac{\pi\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}\frac{1}{kk'}(W_2\cos^2(\theta/2)+W_1 2\sin^2(\theta/2)) \tag{7.25}$$

と比較すれば，タイプ i の１個のパートンが W_1, W_2 へ行う寄与は

$$W_1^i=e_i^2\frac{Q^2}{4M^2x^2}\delta(\nu-Q^2/2Mx) \tag{7.26}$$

$$W_2^i=e_i^2\delta(\nu-Q^2/2Mx) \tag{7.27}$$

で表されることが，ただちにわかる．ここで $m_i=xM$ を用いた．ν および Q^2 が大きくなる領域では，それぞれのパートンからの寄与が干渉なし（インコヒーレント）に，断面積に効くと仮定する．したがって，すべてのクオーク・パートンからの寄与を算出するためには，すべてのタイプ i からの寄与を総和し，さらに，パートンによって運ばれる運動量の部分比 x について積分しなくてはならない．x についての積分は，タイプ i のパートンが運動量の部分比 x を担う確率 $f_i(x)$ の重みをかけて行わなくてはならない．この確率分布関数は模型から予測することはできず，クオーク・パートンの物理像では陽子の基本的パラメー

ターである．構造関数 W_2 は

$$W_2(\nu,\ Q^2)=\sum_i\int_0^1 \mathrm{d}x f_i(x) e_i^2 \delta(\nu-Q^2/2Mx) \tag{7.28}$$

となる．Dirac の δ 関数の性質（付録 A，式(A.118) 参照）

$$\delta(g(x))=\frac{\delta(x-x_0)}{|\mathrm{d}g/\mathrm{d}x|_{x=x_0}} \tag{7.29}$$

（ただし x_0 は $g(x_0)=0$ で定義される）により，x 積分に関しては

$$\delta(\nu-Q^2/2Mx)=(x/\nu)\delta(x-Q^2/2M\nu) \tag{7.30}$$

と書くことができる．したがって

$$\nu W_2(\nu,\ Q^2)=\sum_i e_i^2 x f_i(x)\equiv F_2(x) \tag{7.31}$$

が得られ，望んでいたスケーリングのふるまいが得られた．同様な計算を行えば

$$MW_1(\nu,\ Q^2)=F_1(x) \tag{7.32}$$

および

$$2xF_1(x)=F_2(x) \tag{7.33}$$

が導かれる．

F_1 と F_2 の間のこの関係式は，Callan-Gross の関係式と呼ばれる（Callan and Gross, 1969 参照）．これはクォークがスピン 1/2 を持つという仮定からの直接の帰結である．この関係式の物理的起源は，仮想光子の全断面積が，横波の仮想光子（$\lambda=\pm1$）と縦波の仮想光子（$\lambda=0$）からそれぞれどういう寄与を受けるか，という議論でもっともよく説明することができる．仮想光子に対しては $q^2\neq0$ であるから，縦波光子（スカラー光子）が存在する（5. 6 節参照）．しかし，偏極ベクトルの議論に関しては，空間的な q^2 についてわずかの差異がある．

$$q^\mu=(q^0,\ 0,\ 0,\ q^3) \tag{7.34}$$

が成り立つような座標系では，横偏極は前と同じく

$$\varepsilon^\mu(\lambda=\pm1)=\mp2^{-1/2}(0,\ 1,\ \pm\mathrm{i},\ 0) \tag{7.35}$$

で，規格化は

$$\varepsilon^2(\lambda=\pm1)=-1 \tag{7.36}$$

である．縦（あるいはスカラー）偏極に対しては

$$q\cdot\varepsilon=0 \tag{7.37}$$

が満たされなくてはならないから

$$\varepsilon^{\mu}(\lambda=0)=(1/\sqrt{Q^2})(q^3,\ 0,\ 0,\ q^0) \tag{7.38}$$

となり，規格化は

$$\varepsilon^2(\lambda=0)=+1 \tag{7.39}$$

である．仮想光子の断面積の正確な定義は，明らかに約束事にすぎない．ふつう，偏極 λ の実光子が偏極していない陽子の標的に入射する場合の全断面積との類推から，それを

$$\sigma_{\lambda}(\gamma \mathrm{p}\to \mathrm{X})=(4\pi^2\alpha/K)\varepsilon^*_{\mu}(\lambda)\varepsilon_{\nu}(\lambda)W^{\mu\nu} \tag{7.40}$$

ととっている．式(7.2)で定義されたテンソル $W^{\mu\nu}$ がはいっていることに注意せよ．因子 K はフラックスの因子である．質量 W の終状態を作るような実光子に対しては

$$K=(W^2-M^2)/2M \tag{7.41}$$

である．いわゆる“Hand の規約”では，質量 W の終状態を作る仮想光子に対しても，同じ因子を用いる．この定義より，横光子（$\lambda=\pm 1$）の断面積

$$\sigma_{\mathrm{T}}=(4\pi^2\alpha/K)\frac{1}{2}\sum_{\lambda=\pm 1}\varepsilon^*_{\mu}(\lambda)\varepsilon_{\nu}(\lambda)W^{\mu\nu} \tag{7.42}$$

は

$$\sigma_{\mathrm{T}}=(4\pi^2\alpha/K)W_1 \tag{7.43}$$

で与えられ（問題7．3），縦（あるいはスカラー）光子の断面積

$$\sigma_{\mathrm{S}}=(4\pi^2\alpha/K)\varepsilon^*_{\mu}(\lambda=0)\varepsilon_{\nu}(\lambda=0)W^{\mu\nu} \tag{7.44}$$

は

$$\sigma_{\mathrm{S}}=(4\pi^2\alpha/K)[(1+\nu^2/Q^2)W_2-W_1] \tag{7.45}$$

で与えられる．実はこれらの式は，W_1，W_2 の正値性

$$W_1\geqslant 0 \tag{7.46}$$

$$(1+\nu^2/Q^2)W_2-W_1\geqslant 0 \tag{7.47}$$

の直観的な説明になっている．$\lambda=0$ の断面積に表れる組み合わせ

$$W_{\mathrm{L}}=(1+\nu^2/Q^2)W_2-W_1 \tag{7.48}$$

を W_{L} で表すことがある．断面積のスケーリング極限値は，$x=Q^2/2M\nu$ が有限で Q^2，ν がきわめて大きくなる極限で

$$\nu W_2\longrightarrow F_2 \tag{7.49 a}$$

$$MW_1 \to F_1 \tag{7.49 b}$$

となることを用い，

$$\sigma_T \to \frac{4\pi^2 \alpha}{MK} F_1(x) \tag{7.50}$$

$$\sigma_S \to (4\pi^2 \alpha/MK)(1/2x)(F_2 - 2xF_1) \tag{7.51}$$

のように求められる．ここで，最後の式の中で F_2/ν の桁は無視した．したがって，Callan-Gross の関係式は，光子の断面積では

$$\sigma_S/\sigma_T \to 0 \tag{7.52}$$

という関係に対応する．

点状，スピン 0 のパートンを用いたパートン模型では，まったく反対の結果

$$\sigma_T/\sigma_S \to 0 \tag{7.53}$$

が出ることが証明される．これらの結果はいずれも，いわゆるパートンの Breit 系（または“煉瓦塀”座標軸ともいう）において，パートンと光子のヘリシティを考えて導くことができる．この特別な座標系は，光子とパートンが一直線上に運動し，パートンの 3 元運動量が衝突によって正確に反転するようなとり方である（図 7.6 参照）．この座標系では，光子は 3 元運動量だけを移行させ，エネルギーは移行させない．スカラーのパートンに対して，横波の光子断面積が 0 になることは今や明らかである．なぜならば，横光子は角運動量の z 成分 ± 1 単位を担っているのでスピン 0 のパートンはこの光子を吸収できないからである．したがってスカラー光子 $\lambda=0$ の断面積のみが 0 でない．スピン 1/2 のパートンについては，議論は少しこみいってくる．断面積は，パートンと光子の間の γ_μ 相互作用のヘリシティに依存するからである．のちに第 10 章で，質量を持たないスピン 1/2 の粒子に対しては，γ_μ 相互作用はヘリシティを保存する，

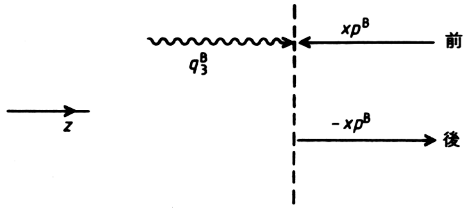


図 7.6 Breit 座標系の光子・パートン相互作用

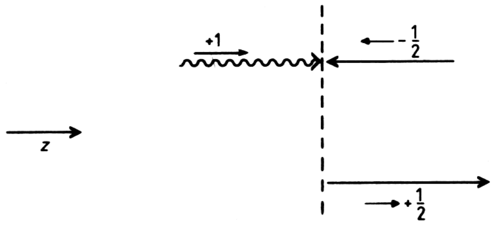


図 7.7　ヘリシティを保存するスピン 1/2 粒子による光子の吸収に伴う角運動量の収支

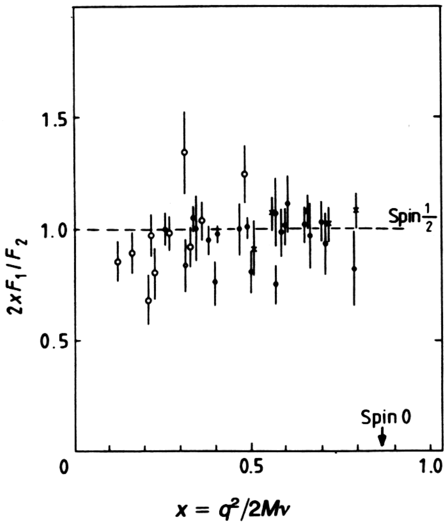


図 7.8　比 $2xF_1/F_2$. 白丸は $1.5<q^2<4\mathrm{GeV}^2$, 黒丸は $5<q^2<11\mathrm{GeV}^2$, 十字点は $12<q^2<16\mathrm{GeV}^2$ の領域のデータである. (D. Perkins, 高エネルギー物理学入門第 3 版, Addison-Wesley (1987))

すなわち粒子の運動方向に対するスピンの射影の大きさは変わらないことを示す. したがって Breit 系では, ヘリシティの保存は, パートンの角運動量の z 成分が ±1 単位だけ変わることが必要になり, 横光子の吸収がどうしてもいる(図 7.7). パートンの Breit 系から“実験室”系へ Lorentz 変換を行っても, 縦光子と横光子の比は, パートンの横運動量を無視する限り, 変わらない. この議論

から，Callan-Gross の関係式の起源は明らかである．

すべての深非弾性散乱ではないにしても，大部分の深非弾性散乱について，比 $R=\sigma_S/\sigma_T$ が小さいという事実によって，Callan-Gross の関係式は，実験的にだいたい満たされている（図 7.8 参照）．このことから，光子と相互作用を行う荷電パートンは，スピン 1/2 を持つと考えてよい．

7. 3 クオーク・パートン模型

“パートン” はクオーク（および反クオーク）であるという考えをさらに一歩進めよう．光子がこれらの粒子とだけ作用すると仮定するならば，スケーリングにもっと立ち入った予言を行うことができる．クオークの量子数は第 1 章に掲げておいた．陽子に対して（式(7.31) 参照）結果は

$$F_2^{\mathrm{ep}}(x)=x\left\{\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]+\cdots\right\} \tag{7.54}$$

となる．ここで $u(x)$ は陽子の中の u クオークの確率分布，$\bar{u}(x)$ は反クオークの確率分布，などであるが，記号は自明であろう．ここまでは，1 個の未知関数を 6 個の未知関数で置き換えただけで，利するところはないようにみえる．クオーク・パートン模型の強力な利点は，同じ 6 個の分布関数が，組み合わせを変えて，中性子標的にも現れ，またニュートリノおよび反ニュートリノを入射粒子とする深非弾性散乱の類似な取り扱いにも現れることである（11. 2節参照）．中性子標的からの電子散乱については，u および d クオークの中性子および陽子中における分布を，I スピン不変性 (Close, 1979 参照) を用いて関連づけることができる．その結果は

$$u^{\mathrm{p}}(x)=d^{\mathrm{n}}(x)\equiv u(x) \tag{7.55}$$

$$d^{\mathrm{p}}(x)=u^{\mathrm{n}}(x)\equiv d(x) \tag{7.56}$$

である．したがって en 散乱のスケーリング関数は

$$F_2^{\mathrm{en}}(x)=x\left\{\frac{4}{9}[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[u(x)+\bar{u}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]+\cdots\right\} \tag{7.57}$$

と書ける．

陽子および中性子の中のクオークの分布は，ある制約を満たさなければならない．陽子も中性子もストレンジネス（疎速度）は 0 であるから総和法則

$$\int_0^1 dx[s(x)-\bar{s}(x)]=0 \tag{7.58}$$

を得る．同様に陽子および中性子の電荷から次の総和法則を得る．

$$\int_0^1 dx\left\{\frac{2}{3}[u(x)-\bar{u}(x)]-\frac{1}{3}[d(x)-\bar{d}(x)]\right\}=1 \tag{7.59 a}$$

$$\int_0^1 dx\left\{\frac{2}{3}[d(x)-\bar{d}(x)]-\frac{1}{3}[u(x)-\bar{u}(x)]\right\}=0 \tag{7.59 b}$$

これらは次の総和法則

$$2=\int_0^1 dx[u(x)-\bar{u}(x)] \tag{7.60 a}$$

$$1=\int_0^1 dx[d(x)-\bar{d}(x)] \tag{7.60 b}$$

と同等であるが，これは陽子の中の u および d クオークが，それぞれの反クオークよりどれだけ余計にあるかを示す式である．これらの総和法則を検証するには，いろいろな構造関数を別々に知らなくてはならないが，そのためにはニュートリノ散乱のデータが必要である．これは第 11 章で論ずる．

パートンの分布について理論的なモデルをたてれば，さらにこれ以外の総和法則や関係式を導くことができる．例えば，“価”クオーク（初等的な構成素子模型のクオーク）と“海”クオーク（仮想的に作られる $q\bar{q}$ 対）の概念を導入することができる．このとき，陽子の中では u および d クオークの分布は，価 (v) 分布と海分布 (s) の和でパラメーター化され

$$u=u_{\mathrm{v}}+q_{\mathrm{s}} \tag{7.61 a}$$

$$d=d_{\mathrm{v}}+q_{\mathrm{s}} \tag{7.61 b}$$

と表される．一方，反クオークとストレンジ・クオークの分布は純粋に海分布であると仮定すれば

$$\bar{u}=\bar{d}=s=\bar{s}=q_{\mathrm{s}} \tag{7.62}$$

である．このモデルでは 6 個の未知関数を 3 個の未知関数で置き換えてしまうから，より多くの予言を行うことができる．ストレンジネスの総和法則 (7.58) はもはや自動的に成立するが，一方総和法則 (7.60 a)，(7.60 b) は価クオークの分布のみによって満たされる．

$$\int_0^1 \mathrm{d}x u_V(x) = 2 \tag{7.63 a}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x d_V(x) = 1 \tag{7.63 b}$$

比 F_2^{en}/F_2^{ep} は興味深い．式(7.54)，(7.57) および (7.61) より

$$F_2^{en}/F_2^{ep} = \frac{4d_V + u_V + \sum}{4u_V + d_V + \sum} \tag{7.64}$$

である．ここに $\sum$ は海からのすべての寄与を表す．実験データは図 7.9 に示してある．どのようなモデルに対しても，確率分布関数はすべて正値定符号であるはずだからただちに制限

$$\frac{1}{4} \leqslant F_2^{en}/F_2^{ep} \leqslant 4 \tag{7.65}$$

が得られる．これはデータと矛盾しない．しかし，x が小さいところで比は 1 に近づくことに注意を払うと，式(7.64) よりこの領域では海クオークの寄与が支配的であることがわかる．これは図 7.2 の分布がもっとも簡単な期待と非常に異なっていることを説明しているのかもしれない．全体の分布はおそらく 2 つ

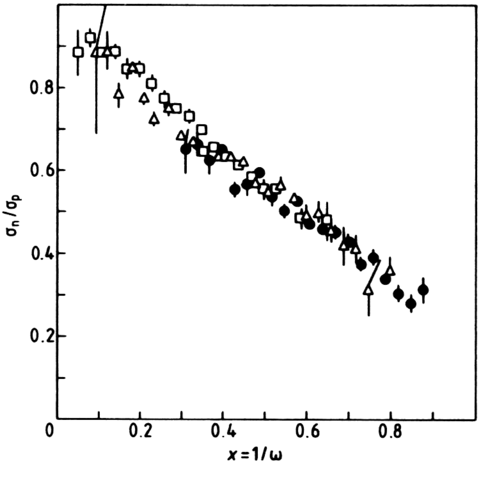


図 7.9　微分断面積 σ_n/σ_p を x に対して描いた図 (Bodek *et al*., 1974)．黒丸は 15°，19°，26°，34°，白三角は 18°，26°，34°，白四角は 6°，10° のデータである．データの示すように，もし σ_S/σ_T は n および p について同じなら，σ_n/σ_p は F_2^{en}/F_2^{ep} と解釈することができる

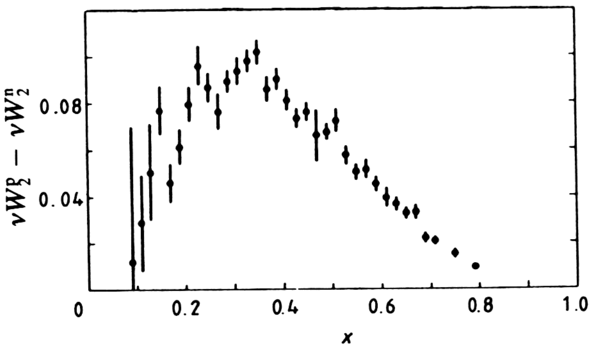


図 7.10　$\nu W_2^p - \nu W_2^n$ を x に対して描いた図（Bodek *et al*., 1973）

の分布の和になっていて，1 つの分布は $x \sim 1/3$（価クオーク）付近に山を持ち，他の分布は小さい x（海クオーク）で大きいのであろう．このような物理像は少なくとも定性的には陽子と中性子の構造関数の差を調べることで検証できよう．差を取れば海クオークの寄与は消去されてしまうからである．図 7.10 はこのような分布の一例で，価クオークに期待されるふるまいをほぼ示している．クオークと反クオークの寄与を定量的に分離することは，ニュートリノの散乱データを採用して行うことができる（第 11 章参照）．

もう 1 つ重要な総和法則が，$xf_i(x)$ はクオーク i によって運ばれる運動量の一部分であるという物理像から出てくる．これが運動量総和法則

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x[u(x)+\bar{u}(x)+d(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]=1-\varepsilon \tag{7.66}$$

で，ε は陽子の運動量のうちクオークによって運ばれるのではない部分と解釈される．式(7.66)の積分は直接 ν および $\bar{\nu}$ の非弾性散乱断面積と結びついていて(11．2 節)，その値は $\varepsilon \simeq 1/2$ と考えられている．(CHARM，1981 の実験値は $1-\varepsilon=0.44\pm0.02$ である．）これは陽子の全運動量のおよそ半分は電荷を持たないものに担われていることを示唆する．この残りの“パートン”は，QCD のグルーオン（膠着子）であろうと同定されている（第 9 章参照）．

7. 4 Drell-Yan 過程

パートン模型の重要性は,深非弾性レプトン散乱というもともとの領域から,大きくほかの領域にも広がっている.深非弾性散乱では,パートン模型のより形式的な基礎を,光円錐上の演算子および短距離の演算子積の展開によって与えることができる(Frishman, 1974).パートンによる定式化の利点は,パートン模型の記述なら適切であるが形式的な演算子の議論ではできないような過程が,ほかにあるからである.そのような過程の中でもっとも重要なものがDrell-Yan 過程(Drell and Yan, 1970)

$$\mathrm{p}+\mathrm{p}\to\mu^+\mu^-+\mathrm{X} \tag{7.67}$$

である.これは図 7.11 に示すように,陽子·陽子衝突によって $\mu^+\mu^-$ 対(つい)のほかに,観測しないハドロン群 X が生成される反応である.パートン模型の仮定は,

$$\tau=\frac{q^2}{s}\ \text{を一定に保って}\quad s\to\infty \tag{7.68}$$

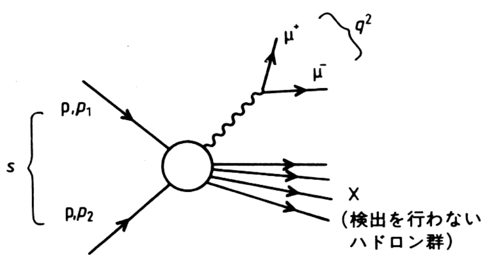


図 7.11 Drell-Yan 過程

の極限で,おもな反応は図 7.12 に示したものになる,ということである.この極限では,別々のハドロンからでてきたクォークと反クォークが消滅して仮想光子を生じ,これが $\mu^+\mu^-$ 対に崩壊する,と仮定される(図 7.3, 7.4 参照).残りのクォークや反クォークはのちハドロン群となって飛び出す.

重心系で計算を行い,すべての質量を無視しよう.この場合

$$p_1^\mu=(P,\ 0,\ 0,\ P),\qquad p_2^\mu=(P,\ 0,\ 0,\ -P) \tag{7.69}$$

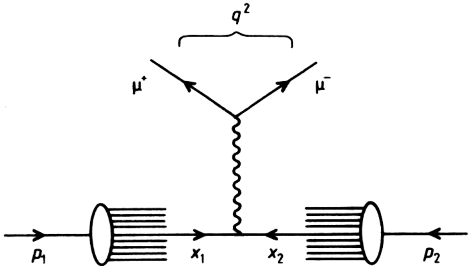


図 7.12　Drell-Yan 過程のパートン模型

および

$$s=4P^2 \tag{7.70}$$

である．クォークの質量と横向き運動量をすべて無視すれば，クォークの運動量は

$$p^{\mu}_{q_1}=x_1(P,\ 0,\ 0,\ P) \tag{7.71 a}$$

$$p^{\mu}_{q_2}=x_2(P,\ 0,\ 0,\ -P) \tag{7.71 b}$$

となる．光子の運動量

$$q=p_{q_1}+p_{q_2} \tag{7.72}$$

は 0 でない成分

$$q^0=(x_1+x_2)P \tag{7.73 a}$$

$$q^3=(x_1-x_2)P \tag{7.73 b}$$

を持つ．したがって

$$q^2=4x_1x_2P^2 \tag{7.74}$$

となり，式(7.70) より

$$\boxed{\tau=q^2/s=x_1x_2} \tag{7.75}$$

である．基本的な過程の断面積

$$q\bar{q} \to \mu^+\mu^- \tag{7.76}$$

は，問題 6．7 の結果を用いて計算できる．QED 過程

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^- \tag{7.77}$$

の断面積は（すべての質量を無視すれば）

$$\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)=4\pi\alpha^2/3q^2 \tag{7.78}$$

であるから，タイプ a，電荷 e_a（e の単位で）のクオークに対して

$$\sigma(\mathrm{q}_a\bar{\mathrm{q}}_a \to \mu^+\mu^-)=(4\pi\alpha^2/3q^2)e_a^2 \tag{7.79}$$

であると期待することができる．陽子・陽子衝突に対するパートン模型の予言は，この断面積に，タイプ a，運動量部分比 x_1 のクオークを見いだす確率と，運動量部分比 x_2 の同じタイプの反クオークを見いだす確率

$$q_a(x_1)\mathrm{d}x_1\bar{q}_a(x_2)\mathrm{d}x_2 \tag{7.80}$$

をかければよい．もちろん，このほかに反クオークが部分比 x_1 を持ちクオークが部分比 x_2 を持つ確率

$$\bar{q}_a(x_1)\mathrm{d}x_1q_a(x_2)\mathrm{d}x_2 \tag{7.81}$$

が効く．Drell-Yan の予言は

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{d}^2\sigma(\mathrm{pp}\to\mu^+\mu^-+\mathrm{X})\\&\qquad=\frac{4\pi\alpha^2}{9q^2}\sum_a e_a^2[q_a(x_1)\bar{q}_a(x_2)+\bar{q}_a(x_1)q_a(x_2)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned}} \tag{7.82}$$

である．この式にはクオークのカラー自由度（第 9 章参照）を考慮して因子 1/3 を乗じた．カラー 1 重項の光子を作るためには，クオークと反クオークのカラーを整合させなくてはならない．方程式(7.82) が主幹公式である．深非弾性レプトン散乱にも同じクオーク分布関数が現れるから，Drell-Yan 過程では絶対的な（モデルによらない）予言ができる，ということが重要である．例えば，図 7.12 の光子を W 粒子（あるいは Z 粒子）で置き換えると，W 粒子（あるいは Z 粒子）の生成断面積を予言することができる．詳しくは第 14 章で論ずる．

ある種の“スケール”則がこの断面積に成り立つと期待してよい．これは式(7.79) の点状素子の断面積に由来する．この性質を示すには，問題 7.4 で用いる変数 q^2 と $x_\mathrm{F}=x_1-x_2$ を用いる．そこでは無次元量

$$q^4\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x_\mathrm{F}} \tag{7.83}$$

が x_F および比 $\tau=q^2/s$ の関数であるべきことが示される．データはこの予言によくあう（図 7.13 参照）．

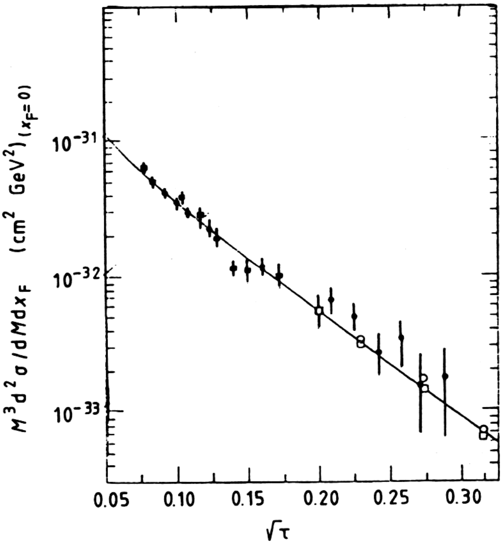


図 7.13　pN 散乱の $x_F=0$ における無次元断面積 $M^3d^2\sigma/dMdx_F$ ($M=\sqrt{q^2}$) を $\sqrt{\tau}=M/\sqrt{s}$ に対して描いた図 (Scott, 1985). 黒丸は $\sqrt{s}=62$ GeV, 黒四角は 44 GeV, 白四角は 27.4 GeV, 白丸は 23.8GeV のデータである.

さらに，レプトン対がクオーク・反クオーク対の消滅によって生じた仮想光子によって作られるという仮定は，2つのレプトンの静止系におけるどちらかのレプトンの角分布（入射陽子のビームの方向に対する相対的角分布）を観測して，検証することができる．この分布は $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の分布

$$d\sigma/d\Omega \propto (1+\cos^2\theta) \tag{7.84}$$

と同じと期待され（式(6.135) 参照)，事実そのとおり観測されている（図 7.14 参照)．図 7.14 はクオークがスピン 1/2 を持つ証拠になっていることに注意せよ．もしクオークがスピン 0 を持つならば角分布は $(1-\cos^2\theta)$ に比例する（問題7．5 参照）であろうが，明らかにその可能性が排除されている．

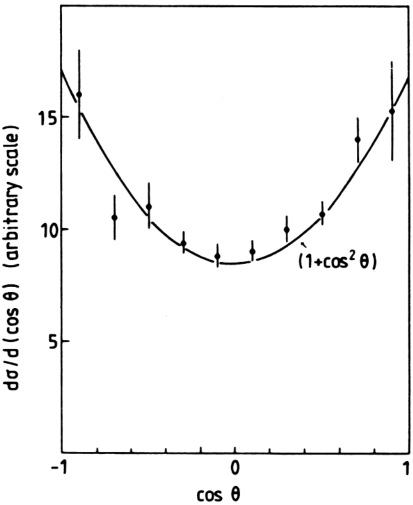


図 7.14 Drell-Yan 過程において，$\mu^+\mu^-$ の静止系で入射ビームの方向に相対的に測ったミューオンの角分布．
(D. Perkins，高エネルギー物理学入門第 3 版，Addison-Wesley (1987))

7. 5 電子・陽電子消滅によるハドロン生成

最後の電磁過程として，電子・陽電子が消滅してハドロンを生ずる反応を考えよう（図 7.15）．

$$e^+e^- \to X \tag{7.85}$$

いつものように，1 光子の中間状態が支配的であると仮定する．どのように仮想光子はハドロンに転化するのであろうか．パートンの物理像によれば，これは Drell-Yan 過程

$$pp \to \mu^+\mu^- + X \tag{7.86}$$

によく似ている．q^2 の大きい領域では，基本的な素過程は，クォーク・反クォークの生成（図 7.16）であろうと想像するのは，まったく自然である．$q\bar{q}$ 対生成の全断面積は（式(7.79) 参照）

$$\sigma(e^+e^- \to q_a\bar{q}_a) = (4\pi\alpha^2/3q^2)e_a^2 \tag{7.87}$$

である．生成されたクォークと反クォークは，ついで“着物を着て”，ふつうの

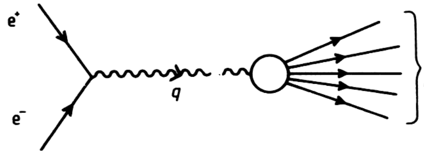


図 7.15　1 光子近似により e^+e^- が消滅してハドロン群を生成する過程

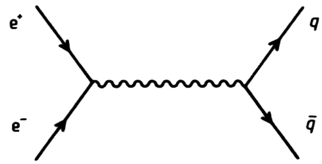


図 7.16　e^+e^- が消滅してハドロン群を発生する過程のパートン模型による素過程

無色のハドロンに変身しなければならない(第 9 章参照)．この装着過程は断面積には影響しないと仮定する．とすると，クオーク・パートン模型では，q^2 が大きいとき次の結果に到達する．

$$\sigma(e^+e^- \to \text{ハドロン群}) = (4\pi\alpha^2/3q^2)\sum e_a^2 \tag{7.88}$$

この結果はふつう比 R の形

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{ハドロン群})}{(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_a e_a^2 \tag{7.89}$$

で引用されている．軽いクオーク u，d，s はそれぞれ 3 種のカラーで現れるから

$$R = 3[(2/3)^2 + (-1/3)^2 + (-1/3)^2] = 2 \tag{7.90}$$

と期待される．c 生成のしきい値以上で b 生成のしきい値以下の領域では $R = 10/3$, b 生成のしきい値以上の領域では $R = 11/3$ である．図 7.17 に示すように，この予言は実験と適正な一致を示す．特に共鳴領域より上，b 生成のしきい値以下の一致がよい．パートン模型の予言 (7.89) に対する QCD の補正は重要な問題で，9．5 節で論ずる．

カラーの閉じこめのメカニズム (15．3 節参照) を仮定してもこの予言をそこなわないという事実から，この物理像のさらに詳細な予言が考察された．たと

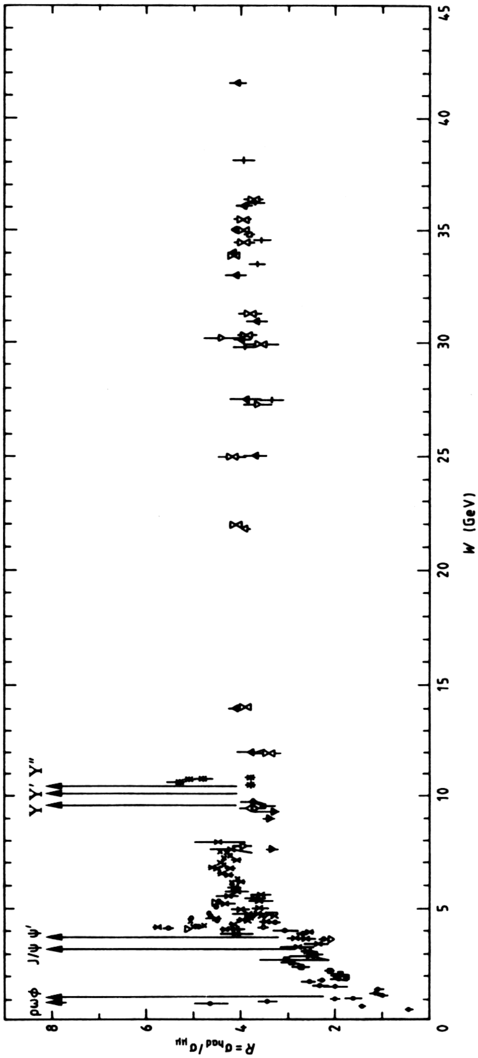


図 7.17　比 R（式(7.89) 参照，R. Cashmore の好意による）

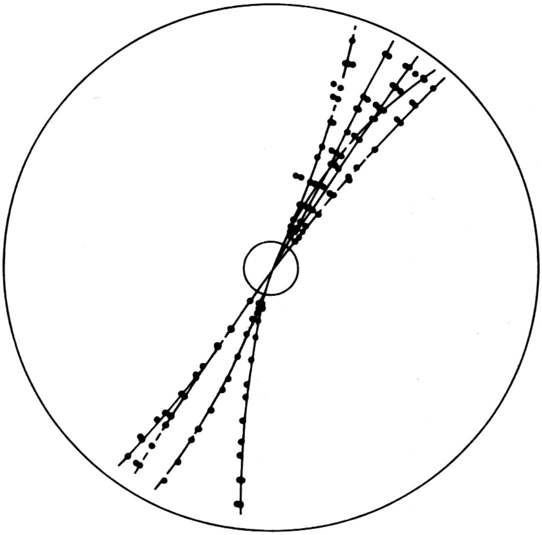


図7.18　e^+e^- 消滅反応による2枝ジェットの現象．PETRAe^+e^- 貯蔵リングのTASSO検出器のデータである

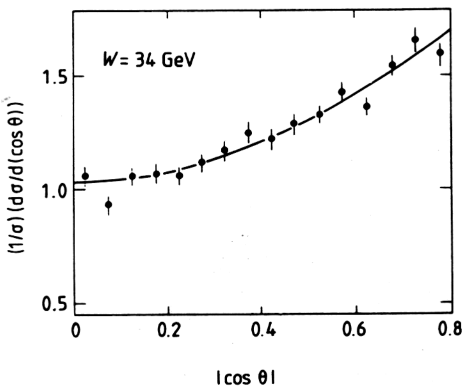


図7.19　$e^-e^-\to 2$ 枝ジェットの過程における2枝ジェット現象の角分布．入射ビームの方向に対して，2枝ジェットの静止系で測る(Althoff, 1984)．実線の曲線は $(1+\cos^2\theta)$ の分布を表す．

えば，質量を持たないスピン 1/2 のクオークの角分布は（式(6.135)参照），$\mu^+\mu^-$ 生成反応と同じく

$$d\sigma/d\Omega=(\alpha^2/4q^2)e_a^2(1+\cos^2\theta) \tag{7.91}$$

で与えられる．しかしこの場合には重要な違いがある．クオークは観測されないのである．にもかかわらず，式(7.91) の顕著な“記憶”が終状態のハドロンの間に残っている．実験的には，相互作用の領域から多数のハドロンが，2 つの比較的よく方向のそろった円錐の中に放出され，“ジェット”を形作る．図 7.18（すでに 1．2．4 節において図 1.16 として示した）参照．推定したジェット軸の方向の角度の関数として事象の数の分布を調べると図 7.19 となり式(7.91)とよい一致を示す．根源になる過程は $e^+e^- \to q\bar{q}$ であり，クオークと反クオークは分離するに従い非常に強いカラー力を及ぼしあってハドロン群に変ずるが（第 9 章参照）最初のクオーク角分布の記憶は失わない，と解釈されている．

再び，最近の実験的および理論的関心はこれらの予言の補正 — この場合は“グルーオンの制動輻射”に帰せられる 3 枝あるいは 4 枝ジェットの研究に向けられている．第 9 章でその成果の一端を紹介する．

まとめ

(1) 非弾性電子散乱の運動学．

(2) 核子の構造関数の定義．

(3) スケーリングおよびパートン．

(4) 構造関数に対するパートン模型の予言．

(5) Callan-Gross の関係式．

(6) クオーク・パートン模型，総和法則．

(7) パートン模型における Drell-Yan 過程，スケーリング．

(8) 電子・陽電子消滅によるハドロンの生成，ジェット．

問題

7. 1　式(7.2)，(7.9) の中のいろいろな規格化定数は，次のようにして調べることができる．電子・陽子散乱の包含断面積（式(7.9)）は，いつものように1光子交換の近似で

$$d\sigma=\left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2\frac{1}{4[(k\cdot p)^2-m^2M^2]^{1/2}}4\pi ML_{\mu\nu}W^{\mu\nu}\frac{d^3k'}{2\omega'(2\pi)^3} \tag{7.1.1}$$

と書くことができる．テンソル $W^{\mu\nu}$ は，電磁カレント演算子のハドロン行列要素（式(7.2)）と

$$\begin{aligned}e^2W^{\mu\nu}(q,p)=\frac{V}{4\pi M}\frac{1}{2}\sum_s\sum_X\langle \mathrm{p};p,s\,|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{X};p'\rangle\\ \times\langle \mathrm{X};p'\,|\,\hat{j}^{\nu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{p};p,s\rangle(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

のように関連している．X に関する和は，すべての可能なハドロンの終状態に及ぶ．弾性散乱という特別な場合を考えれば，X に関する和は，終わりの陽子の自由度についてとり

$$\begin{aligned}e^2W^{\mu\nu}_{\mathrm{el}}=\frac{\mathrm{V}}{4\pi M}\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\langle \mathrm{p};p,s\,|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{p}\,;\,p',\ s'\rangle\langle \mathrm{p}\,;\,p',\ s'\,|\,\hat{j}^{\nu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{p}\,;\,p,\ s\rangle\\ \times(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{2E'}\end{aligned} \tag{7.1.3}$$

となる．“点”陽子の電磁カレント行列要素に対する式(6.137) を用いて，断面積は eμ 散乱の断面積と一致することを示せ．

7. 2　(a)　包含非弾性電子・陽子散乱に対して，縮約 $L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$ を行え．$q^{\mu}L_{\mu\nu}=q^{\nu}L_{\mu\nu}=0$ であることに注意せよ．その結果を用い，“実験室”変数を使って電子の質量を無視した包含微分断面積は

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dk'}=\frac{\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}[W_2\cos^2(\theta/2)+W_1 2\sin^2(\theta/2)] \tag{7.2.1}$$

の形を持つことを示せ．

(b)　変数変換 $(x,\ y)\rightarrow(u,\ v)$ に対するヤコビアン

$$J=\begin{vmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{vmatrix} \tag{7.2.2}$$

$$du\,dv=|J|\,dx\,dy \tag{7.2.3}$$

を計算して，$d^2\sigma/dQ^2d\nu$ および $d^2\sigma/dxdy$ に対する表式を見いだせ．ここに Q^2，ν は従来どおりの意味を持ち，x はスケーリング変数 $x=Q^2/2M\nu$，y は $y=\nu/k$ である．

7. 3　非弾性電子・陽子散乱を仮想光子の断面積で書くことを考える．

(a)　運動量が

$$p^{\mu}=(M,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{7.3.1}$$

$$q^{\mu}=(q^0,\ 0,\ 0,\ q^3) \tag{7.3.2}$$

で表される“実験室”系で，スピンの和

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=\pm1}\varepsilon_{\mu}(\lambda)\varepsilon_{\nu}^{*}(\lambda)W^{\mu\nu} \tag{7.3.3}$$

を行え．その結果から横波の仮想光子に対する“Hand”の断面積は

$$\sigma_{\mathrm{T}}=(4\pi^2\alpha/K)W_1 \tag{7.3.4}$$

となることを示せ．

(b)　定義

$$\varepsilon_{\mathrm{S}}^{\mu}=(1/\sqrt{Q^2})(q^3,\ 0,\ 0,\ q^0) \tag{7.3.5}$$

を用い，この式を“実験室”系の4元ベクトル p^{μ}，q^{μ} で書き直して，縦（またはスカラー）光子の断面積を計算せよ．結果は

$$W_2=\frac{K}{4\pi^2\alpha}\frac{Q^2}{Q^2+\nu^2}(\sigma_{\mathrm{S}}+\sigma_{\mathrm{T}}) \tag{7.3.6}$$

で与えられることを示せ．

7. 4　(a)　便宜的に δ 関数を挿入して，質量 $\sqrt{q^2}$ のレプトン対を Drell-Yan 過程で生成する微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{dq^2}=\int dx_1dx_2\frac{d^2\sigma}{dx_1dx_2}\delta(q^2-sx_1x_2) \tag{7.4.1}$$

と書くことができる．この式は

$$\frac{d\sigma}{dq^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{9q^4}\int dx_1dx_2x_1x_2\delta(x_1x_2-\tau)\times\sum_a e_a^2[q_a(x_1)\bar{q}_a(x_2)+\bar{q}_a(x_1)q_a(x_2)] \tag{7.4.2}$$

に等しいことを示せ．$q^2=s\tau$ であるから，これは

$$s^2d\sigma/dq^2=F(\tau) \tag{7.4.3}$$

の形のスケーリング法則を表す．

(b)　Feynman のスケーリング変数

$$x_F = x_1 - x_2 \tag{7.4.4}$$

$$q^2 = s x_1 x_2 \tag{7.4.5}$$

を導入して

$$dq^2 dx_F = (x_1 + x_2) s\, dx_1 dx_2 \tag{7.4.6}$$

を示せ．これから Drell-Yan の公式は

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 dx_F} = \frac{4\pi\alpha^2}{9q^4} \frac{\tau}{(x_F^2 + 4\tau)^{1/2}} \sum_a e_a^2 [q_a(x_1)\bar{q}_a(x_2) + \bar{q}_a(x_1) q_a(x_2)] \tag{7.4.7}$$

と書けることを示せ．

7. 5　Drell-Yan の素過程 $q\bar{q} \to \gamma \to \mu\bar{\mu}$ に関与するクオークがスピン 0 を持つとすれば，最後の $\mu^+\mu^-$ 対の重心系での角分布は $(1 - \cos^2\theta)$ に比例することを示せ．

付録 A　量子力学，特殊相対論，δ 関数

A. 1 節および A. 2 節は，本書全体にわたって用いる非相対論的量子力学と特殊相対論の初歩を，きわめて簡潔にまとめようとしたものである．これらの題目のより詳しい解説は，Gasiorowicz (1974)，Feynman (1963b)，Aitchison (1972) などの書物に与えられている．A. 3 節はやや進んだ話題で，量子力学で用いられるいろいろな“描像”と，式(A.17)，(A.19)，(A.20) の拡張にあたる時間に依存する摂動論への応用を論じたものである．A. 4 節は δ 関数の初等的取り扱いにあてる．

A. 1　非相対論的量子力学（NRQM）

自然単位系（付録 B 参照）

$$\hbar = c = 1$$

量子力学の基本仮定

$$[\hat{p}_i,\ \hat{x}_j] = -\mathrm{i}\delta_{ij} \tag{A.1}$$

座標表示

$$\hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\nabla \tag{A.2}$$

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{x},\ t) = \mathrm{i}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} \tag{A.3}$$

A. 1. 1　スピン 0 の粒子の Schrödinger 方程式

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \hat{V} \tag{A.4}$$

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\boldsymbol{x},\ t)\right)\psi(\boldsymbol{x},\ t) = \mathrm{i}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} \tag{A.5}$$

確率の流れ（問題 3.1 参照）

$$\rho = \psi^*\psi \tag{A.6}$$

$$= |\psi|^2 \geqslant 0 \tag{A.7}$$

$$j=-\frac{\mathrm{i}}{2m}[\psi^*(\nabla\psi)-(\nabla\psi^*)\psi] \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{A.9}$$

自由粒子の解

$$\phi(\boldsymbol{x},\ t)=u(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} \tag{A.10}$$

$$\hat{H}_0 u=Eu \tag{A.11}$$

$$\hat{H}_0=\hat{H}(\hat{V}=0) \tag{A.12}$$

箱（有限体積）の中の規格化

$$\int_V u^*(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=1 \tag{A.13}$$

電磁場との相互作用

電磁ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の中の電荷 q の粒子に対しては

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{p}}\to\hat{\boldsymbol{p}}-q\boldsymbol{A}} \tag{A.14}$$

と置き換える．したがって，

$$\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}}-q\boldsymbol{A})^2\psi=\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{A.15}$$

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi+\mathrm{i}\frac{q}{m}\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi+\frac{q^2}{2m}\boldsymbol{A}^2\psi=\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{A.16}$$

が成り立つ．

注意：(a) $\boldsymbol{A}$ はゲージ条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を満たす．(b) ふつう q^2 を含む項は省略する．

時間に依存する摂動論

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V} \tag{A.17}$$

$$\hat{H}\psi=\mathrm{i}\partial\psi/\partial t \tag{A.3}$$

無摂動系

$$\hat{H}_0 u_n=E_n u_n \tag{A.18}$$

完全性

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\sum_n a_n(t)u_n(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t} \tag{A.19}$$

1 次の摂動論

$$a_{\mathrm{fi}}=\mathrm{i}^{-1}\iint \underbrace{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t}_{\text{4 次元体積素片}}\underbrace{u_{\mathrm{f}}^*(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_{\mathrm{f}}t}}_{\text{終状態}}\underbrace{\hat{V}(\boldsymbol{x},\ t)}_{\text{摂動ポテンシャル}}\underbrace{u_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathrm{f}}t}}_{\text{始状態}} \tag{A.20}$$

重要な例

（i）　時間 t によらないポテンシャル $\hat{V}$

$$a_{\mathrm{fi}}=\mathrm{i}^{-1}V_{\mathrm{fi}}2\pi\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}}) \tag{A.21}$$

$$V_{\mathrm{fi}}=\int \mathrm{d}^3x u_{\mathrm{f}}^*(\boldsymbol{x})\hat{V}(\boldsymbol{x})u_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}) \tag{A.22}$$

（ii）　時間 t とともに振動するポテンシャル

(a)　ポテンシャル $\hat{V}$ が $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ に比例して変化すれば a_{fi} の時間積分は

$$\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_{\mathrm{f}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathrm{i}}t}=2\pi\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}}-\omega) \tag{A.23}$$

で与えられる．すなわち系はポテンシャルからエネルギーを吸収する．

(b)　ポテンシャル $\hat{V}$ が $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ に比例して変化すれば a_{fi} の時間積分は

$$\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_{\mathrm{f}}t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathrm{i}}t}=2\pi\delta(E_{\mathrm{f}}+\omega-E_{\mathrm{i}}) \tag{A.24}$$

で与えられる．すなわちポテンシャルは系からエネルギーを吸収する．

光子の吸収および放出

電磁波の発生源から遠く離れた場所では，ベクトル・ポテンシャルは波動方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0 \tag{A.25}$$

を満たす．

解

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\ t)=\boldsymbol{A}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}_0^*\exp(+\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{A.26}$$

ゲージ条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を課すと

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_0=0 \tag{A.27}$$

が成立し，光子の独立な偏極ベクトルは 2 個になる．

電磁相互作用を 1 次の摂動論で扱えば

$$\hat{V}(\boldsymbol{x},\ t)=(\mathrm{i}q/m)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\ t)\cdot\nabla \tag{A.28}$$

となり，したがって

$$A_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \equiv \text{エネルギー } \omega \text{ の光子の吸収}$$

$$A_0^* \exp(+\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \equiv \text{エネルギー } \omega \text{ の光子の放出}$$

A. 1. 2　スピン 1/2 の粒子の Pauli 方程式

波動関数は 2 成分の列行列（スピノール）である．一般の定常状態は

$$\psi(\boldsymbol{x},\ s) = \phi(\boldsymbol{x})\chi \tag{A.29}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{A.30}$$

の形を持つ積（分離可能）の波動関数の線型結合として表される．

電磁場との相互作用

ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で記述される磁場 $\boldsymbol{B}$ の中の電子は，Pauli 方程式

$$\left(\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})^2 + \frac{ge}{2m}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}\right)\psi = E\psi \tag{A.31}$$

に従う．g 因子はスピン角運動量に対して

$$g \simeq 2$$

であり，古典的な軌道角運動量に対する値

$$g = 1$$

と対比される．

スピン角運動量

スピン演算子 $\boldsymbol{S}$ は χ に働く行列で，通常の軌道角運動量が満たす交換関係

$$[S_i,\ S_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}S_k \tag{A.32}$$

を満たす†．

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{A.33}$$

と置いて，Pauli 行列 σ は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

---

†(原注)　繰り返し現れる指標については足しあわせる．

$$\varepsilon_{ijk}S_k \equiv \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}S_k$$

この習慣は，特に断らない限り，本書全体を通じて守る．

で表される．Pauli 行列は

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.35}$$

を満たす（問題 3.2 参照）．

A．2　特殊相対論，不変性と共変性

座標系を回転すれば，1 つの点 P の座標は 2 つの座標系で異なる座標 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$ を持ち，座標は直交行列 $\mathbf{M}$ によって

$$\boldsymbol{r}'=\mathbf{M}\boldsymbol{r} \tag{A.36 a}$$

あるいは

$$r_i'=M_{ij}r_j \tag{A.36 b}$$

のように結ばれている．直交行列は

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}=1 \tag{A.37}$$

を満たすから，回転によって長さ OP は“不変”に保たれる．

$$\boldsymbol{r}'^2=\boldsymbol{r}^2 \tag{A.38}$$

3 元ベクトル

3 成分から成り座標 $\boldsymbol{r}$ のように変換する量．

$$A'=\boldsymbol{M}A \tag{A.39}$$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が 3 元ベクトルであれば，そのスカラー積は“不変”である．

$$\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \qquad \text{“不変”} \tag{A.40}$$

テンソル

3 元ベクトルの定義を拡張して，たとえば

$$T_{ik}'=M_{ij}M_{kl}T_{jt} \tag{A.41}$$

のように座標の積と同じ変換をする成分から成る量のこと．

各指標が $\mathbf{M}$ と共に変換する．

形式不変性または共変性

例として Newton の方程式

$$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{A.42}$$

を考えると，座標軸を回転した座標系でも同じ形

$$\boldsymbol{F}'=m\ddot{\boldsymbol{r}}' \qquad \text{“共変”} \tag{A.43}$$

をとる．

スピノールと回転

磁場の中で静止している電子の Pauli 方程式は

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\chi=E\chi \tag{A.44}$$

である．ここに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}&=\sigma_x B_x+\sigma_y B_y+\sigma_z B_z\\&=\begin{pmatrix}B_z & B_x-\mathrm{i}B_y\\ B_x+\mathrm{i}B_y & -B_z\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A.45}$$

である．

座標の回転によって

$$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}'\ (\text{ベクトル})$$

$$E\to E\ (\text{スカラーで不変})$$

である．Pauli 方程式の共変性あるいは形式不変性とは，回転した座標系でも

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}'\chi'=E\chi' \tag{A.46}$$

$$\boldsymbol{B}'=\mathbf{M}\boldsymbol{B} \tag{A.47}$$

を満たす χ' が存在せねばならないという主張である．方程式

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\chi=E\chi \tag{A.44}$$

を行列 $\mathbf{U}$ で書き換えて

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\chi=E\mathbf{U}\chi \tag{A.48}$$

とし，

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma})\mathbf{U}^{-1}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\sigma} \tag{A.49}$$

を満たすように $\mathbf{U}$ を作れば，

$$\chi'=\mathbf{U}\chi \tag{A.50}$$

は回転した座標系のスピノールになるはずである．

例

軸 $\boldsymbol{n}$ のまわりの角 θ の回転に対しては $\mathbf{U}$ は

$$\mathbf{U}=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\theta/2) \tag{A.51}$$

となることが示せるので

$$\chi'=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\theta/2)\chi \tag{A.52}$$

が成り立つ．

$\chi^\dagger \chi$ は回転に対して不変である．

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = 1 \tag{A.54}$$

であるから

$$\chi'^\dagger \chi' = \chi^\dagger \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \chi = \chi^\dagger \chi \tag{A.53}$$

が成り立つ．したがって $\chi'^\dagger \chi$ は回転のもとに不変な量すなわちスカラーである．

$\chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi$ は回転に対してベクトルである．

$$\boldsymbol{V} = \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi \tag{A.55}$$

$$\chi' = \mathbf{U} \chi \tag{A.50}$$

とおく．$\mathbf{U}$ は明白な性質（式(A.49)より）

$$\mathbf{U}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{U} = \boldsymbol{M}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j \tag{A.56}$$

をもつ．したがって

$$\boldsymbol{V}' = \mathbf{M} \boldsymbol{V} \tag{A.57}$$

より $\chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi$ は回転に対してベクトルである．

Lorentz 不変性

$x^0 = ct$，$c = 1$ と定義する．x^1 方向の Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \cosh\omega - x^1 \sinh\omega \\ x'^1 &= -x^0 \sinh\omega + x^1 \cosh\omega \\ x'^2 &= x^2 \qquad x'^3 = x^3 \end{aligned} \tag{A.58}$$

である．ただし

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \cosh\omega = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

Lorentz 変換は複素数角の回転同様

$$x'^{02} - \boldsymbol{x}'^2 = x^{02} - \boldsymbol{x}^2 \tag{A.59}$$

を不変量とする．

4 元ベクトル

$$x^\mu = (x^0, \ \boldsymbol{x}), \ (\mu = 0, \ 1, \ 2, \ 3) \tag{A.60}$$

例：

$$p^\mu = (E, \ \boldsymbol{p}) \tag{A.61}$$

$$\partial^\mu = (\partial^0, \ -\nabla) \tag{A.62}$$

スカラー積と測度テンソル

2つの4元ベクトル A^μ, B^μ についてそのスカラー積

$$A\cdot B\equiv A^0B^0-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{A.63}$$

は Lorentz 変換に対して不変である. 測度テンソル $g_{\mu\nu}$ によって, 上指標と下指標を導入するのが便利である.

$$A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu \tag{A.64}$$

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{A.65}$$

したがって

$$A^\mu=(A^0,\ \boldsymbol{A}) \tag{A.63}$$

に対して

$$A_\mu=(A^0,\ -\boldsymbol{A}) \tag{A.66}$$

である. スカラー積は上下指標を用いると

$$A\cdot B=A_\mu B^\mu=g_{\mu\nu}A^\nu B^\mu \tag{A.67}$$

のように書ける.

A. 3 Schrödinger 描像, Heisenberg 描像および相互作用描像, 場の量子論における遷移の初等的な理論

A. 1 節で簡単に復習をした量子力学は, 力学変数($\boldsymbol{x}$ あるいは $\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ のような量) が時間によらず, 波動関数 ψ が

$$H\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\mathrm{i}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} \tag{A.68}$$

にしたがって時間とともに変化する定式化である (式 (A.3) 再録). $\boldsymbol{x}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ ……などによる演算子 $\hat{A}$ は

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle=\int\phi^*(\boldsymbol{x},\ t)\hat{A}\psi(\boldsymbol{x},\ t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{A.69}$$

の形をとり, 一般に ϕ および ψ の時間依存性を通じて時間の関数である. 量子力学の初等的な階梯ではほとんど普遍的に採用されているが, この定式化が唯

一可能なものではなく，いつもいちばん便利なものでもない．

例えば，量子力学と古典力学の類似点（と相異点）を力学理論一般の枠の中で明らかにしたい，と考えたとする．上の定式化はその目的によくかなうものであるとは思われない．古典力学では力学変数は時間に依存し（$\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{p}(t)$ ……など），運動方程式に従う．一方，式(A.68) によれば量子力学の力学変数は時間によらず，“運動方程式”(A.68)は波動関数に関するものである．波動関数にあたるものは古典力学にはない．しかし量子力学では，状態ベクトルあるいは波動関数にユニタリー変換を施すことがいつも可能である．この可能性を利用して，量子力学の別の定式化を行うことができ，この定式化はある意味で古典力学の精神に近い．その方法を次に示す．

式(A.68) は形式的に解くことができ，解は

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}\psi(\boldsymbol{x},\ 0) \tag{A.70}$$

となる．ここで演算子の指数は冪級数で定義され

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}=1-\mathrm{i}\hat{H}t+\frac{1}{2!}(-\mathrm{i}\hat{H}t)^2+\cdots\cdots \tag{A.71}$$

の意味である．式(A.71) で定義された解(A.70) が式(A.68) を満たすこと，および演算子 $\hat{U}=\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t)$ がユニタリーであることを検証するのは容易である．$\hat{H}$の Hermite 性 $\hat{H}^\dagger=\hat{H}$ より

$$U^\dagger=[\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t)]^\dagger=\exp(\mathrm{i}\hat{H}^\dagger t)=\exp(\mathrm{i}\hat{H}t)=U^{-1} \tag{A.72}$$

が成り立つからである．したがって式(A.70)は，時間に依存する波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},\ t)$ を時間に依存しない波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},0)$ へ移すユニタリー変換と考えることができる．これに応じて行列要素(A.69) は

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle=\int\phi^*(\boldsymbol{x},\ 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}\hat{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}\psi(\boldsymbol{x},\ 0)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{A.73}$$

となり，これは時間に依存する演算子

$$\hat{A}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}\hat{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t} \tag{A.74}$$

の時間に依存しない波動関数 $\phi^*(\boldsymbol{x},\ 0)$, $\psi(\boldsymbol{x},\ 0)$の間でとった行列要素とみなすことができる．

式(A.73)はまったく一般的であるから，量子力学の振幅を計算するには上の2つの方法のどちらでもよいことは明らかである．

(a) 時間に依存する ψ と時間に依存しない $\hat{A}$ を用いる方法を"Schrödinger 描像" と言い

(b) 時間に依存しない ψ と時間に依存する $\hat{A}$ を用いる方法を"Heisenberg 描像" という. 2つの描像の波動関数と演算子は, 式(A.70), (A.74) で結びつけられている. 2つの描像は (便宜に選んだ) 時間の原点 $t=0$ で一致している.

$\hat{A}(t)$ は時間の関数だからその運動方程式を求めることができる. 式(A.74) を注意深く (因子の順序に注意して) 微分すると, $\hat{A}$ 自身は t にあからさまによらないとして

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}[\hat{A}(t),\ \hat{H}] \tag{A.75}$$

をうる. これを演算子 $\hat{A}(t)$ の満たす Heisenberg の運動方程式という. 式(A.75) の右辺で $\hat{H}$ は Schrödinger 描像の演算子であるが, 式(A.74) で $\hat{A}$ に $\hat{H}$ を代入すると $\hat{H}(t)=\hat{H}$ となる. したがって $\hat{H}$ は Heisenberg 描像の演算子とも解釈できる. 簡単なハミルトニアン $\hat{H}$ に対しては, 式(A.75) が古典力学の運動方程式とまったく平行した演算子方程式を与え, 場合によってはあからさまに解くこともできる (4. 2. 2 節参照).

以上の概念は場の量子論の演算子と状態ベクトルに同じように適用される. 第4章の場の理論入門では, Heisenberg 描像を用いる. 大部分が自由場の定式化であり相互作用の取り扱いは概略にとどまる. したがって, 例えばモード展開式 (4.130), (4.167) で与えられる演算子の時間依存性は, 対応する自由粒子のハミルトニアンから生成されるものである. 相互作用をしている場の場合は, この描像を用いて多くを得ることはできない. 演算子の時間依存性 (全ハミルトニアンできまる)がわからないからである. そこで Schrödinger 描像に戻り, より抽象的な記法を用いて状態の変化を

$$\hat{H}\,|\,\psi(t)\rangle=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\,\psi(t)\rangle \tag{A.76}$$

で表す. ここで左辺は

$$\hat{H}=\int\hat{\mathscr{H}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{A.77}$$

である. 式(A.76) は "Schrödinger 方程式" ではあるが, ハミルトニアン $\hat{H}$ はもちろん完全に相対論的であることに注意せよ. 密度 $\hat{\mathscr{H}}$ の中に現れる場の演算

子はすべて，Schrödinger 描像と Heisenberg 描像が一致する決まった時刻 $t=0$ で勘定されている．この特定の時刻では，式(4.130)，(4.167) で $t=0$ とおいた展開が確かに可能である．基底関数が完全な組を作っているからである．

もちろん，実際問題としては $\hat{H}$ は複雑すぎて式(A.76) は解けない．そこで NRQM 同様，摂動論に頼らざるを得ない．$\hat{H}$ を 2 つの部分に分ける．$\hat{H}_0$ は関連する場に対するすべての自由粒子のハミルトニアンの和，$\hat{H}_{\mathrm{int}}$ は相互作用のハミルトニアンで

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}=\int\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{A.78}$$

と表される．第 4 章で $\hat{H}_0$ は時間に依存しないことを示す．式(A.78) の中であからさまに，$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}$ の中の場の演算子は $t=0$ で勘定することを書き上げておいた．したがって Schrödinger 描像の場の理論では，$\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{int}}$ に基づく摂動論は NRQM の時間によらない摂動論とよく似ている．実際，$\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の 1 次の程度では，$\hat{H}_0$ の固有状態 $|\mathrm{i}\rangle$ と $|\mathrm{f}\rangle$ の間の遷移の振幅は

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)}=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathrm{f}}t}\langle\mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathrm{i}}t} \tag{A.79}$$

であり，式(A.20) との違いは，行列要素を，自由粒子の量子の占拠数で指定された状態の間でとる，と了解されているだけである．もちろん，一般に $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ は粒子の含まれかたに変化を起こすから，$|\mathrm{i}\rangle$ と $|\mathrm{f}\rangle$ は同じ粒子を含むとは限らない．

式(A.79) はいろいろ等価な形に書くことができる．時間 t について積分すれば式(A.21) と同じく

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)}=-\mathrm{i}\langle\mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle2\pi\delta(E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{i}}) \tag{A.80}$$

である．また一方，$\hat{H}_0|\mathrm{i}\rangle=E_{\mathrm{i}}|\mathrm{i}\rangle$，$\hat{H}_0|\mathrm{f}\rangle=E_{\mathrm{f}}|\mathrm{f}\rangle$ であるから，指数部分を

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)}=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}t\langle\mathrm{f}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_0t}\hat{H}_{\mathrm{int}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0t}|\mathrm{i}\rangle \tag{A.81}$$

の形に書くこともできる．式(A.78) を用いればこの式は

$$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)}=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\langle\mathrm{f}|\hat{\mathscr{H}}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ t)|\mathrm{i}\rangle \tag{A.82}$$

となり，ここに

$$\hat{\mathscr{H}}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_0t}\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0t} \tag{A.83}$$

である．式(A.83) と (A.74) を比較すれば，時間に依存する演算子 $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ t)$ は Heisenberg 描像の演算子のようであるが，その時間依存性は自由ハミルトニアン $\hat{H}_0$ によって($t=0$ の Schrödinger 演算子から)生成されるもので，全ハミルトニアン $\hat{H}$ によるものでない，という点が異なることがわかる．$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(t)$ を $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ 0)$ に対応する“相互作用描像 (表示)”の演算子という．$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ t)$ の中の場はすべて自由粒子の時間依存性を持ち，例えば式(4.130)，(4.167) の形のモード展開で表される．したがって，この定式化では，場の量の展開は完全に相対論的に共変であって，式(A.82) の体積要素は不変，$\mathscr{A}_{\mathrm{fi}}^{(1)}$ も不変である．式(A.82) は 5．2 節の議論の出発点となる．

2 次の摂動論も同じように展開できる．波動力学的な定式化では，$\hat{V}$ (A．1 節参照) があからさまに時間によるときは煩しい．実際本文ではそういう場合は取り扱わない．しかし場の理論では上に強調したように，摂動 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ は Schrödinger 表示では時間によらない．したがって時間に対して変わらないポテンシャルに対する 2 次の遷移の公式を取り込むことができる (例えば Schiff (1955)，29 節を参照)．これは式(A.80) の行列要素 $\langle \mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle$ を

$$\langle \mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle+\sum_{n\neq\mathrm{i}}\langle \mathrm{f}|\hat{H}_{\mathrm{int}}|n\rangle\frac{1}{E_{\mathrm{i}}-E_n}\langle n|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\mathrm{i}\rangle \tag{A.84}$$

で置き換えることを意味する．

$\hat{H}_{\mathrm{int}}$ は一般にいろいろな粒子の粒子数を保存しないから，状態 $|n\rangle$ は状態 $|\mathrm{i}\rangle$ や $|\mathrm{f}\rangle$ とは異なった粒子を含むかもしれない．特に，$|\mathrm{i}\rangle$ と $|\mathrm{f}\rangle$ が同じ粒子を (異なる運動量状態で) 含んでいたとしても，$|n\rangle$ はほかの量子を含むかもしれない，ということが，第 5 章の単一粒子交換過程や力の取り扱い方の基礎になっている (5．6 節および 5．8．2 節参照)．

すでに述べたところによって“見ただけで”不変式である式(A.82) に比べて，式(A.84) の中の第 2 項が式(A.80) に代入されると不変振幅を与える，ということはただちに明らかとは言えない．しかし，5．6 節で扱う特別な場合は，2 つの可能な中間状態 $|n\rangle$ の寄与を取り入れる限り，2 次の振幅も不変であることをあからさまに証明する．この場合，ただ 1 つの不変振幅は，式 (A.84) の“非相対論的”定式化では 2 つの別々の項の和に対応する．

式(A.82) を相互作用表示の演算子 $\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},\ t)$ を用いて拡張し，“明らかに共

変的な”摂動論を直接定式化することも可能である．これは今やどの場の理論の専門書にも解説されている標準的な題目である．しかし本書の目的の範囲では，式(A.84)に基づく方法で十分でありおそらくそのほうがより直観的に理解できるであろう．

A．4　Dirac の δ 関数

A．4．1　序論

図 A.1 に示すように積分を幅 Δx の細長い一片にわたる和として近似することを考えよう．

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x \tag{A.85}$$

図 A.2 に示す関数 $\delta(x-x_j)$

$$\delta(x-x_j)=\begin{cases} 1/\Delta x & j\text{ 番目の間隔で} \quad \text{(A.86)} \\ 0 & \text{その他すべて} \quad \text{(A.87)} \end{cases}$$

を考える．明らかにこの関数は性質

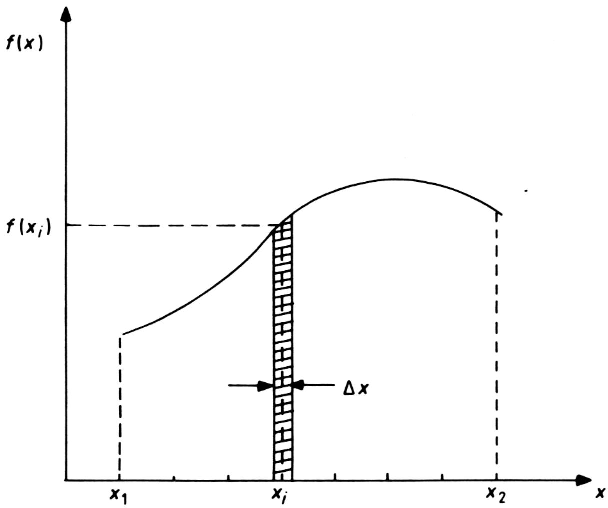


図 A.1 積分の近似的評価

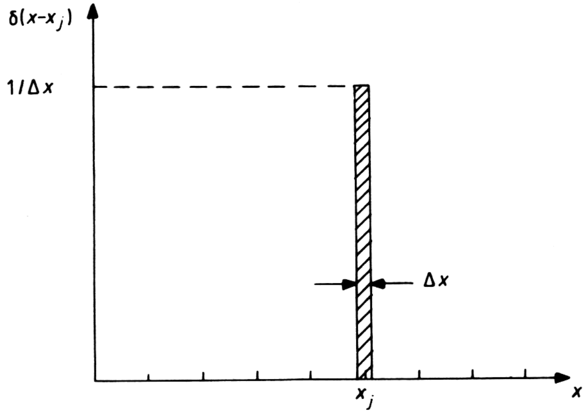


図 A.2 関数 $\delta(x-x_j)$

$$\sum_i f(x_i)\delta(x_i-x_j)\Delta x=f(x_j) \tag{A.88}$$

$$\sum_i \delta(x_i-x_j)\Delta x=1 \tag{A.89}$$

を持つ．積分の形へ移行する極限では，（式(A.85) を左辺から適用して）これらの表式は $x_1<x_j<x_2$ であれば

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x-x_j)=f(x_j) \tag{A.90}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-x_j)\mathrm{d}x=1 \tag{A.91}$$

に帰着する．このような“δ（デルタ）関数”を高い次元に拡張できることは明らかで，例えば 3 次元では

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)\equiv\delta(x-x_j)\delta(y-y_j)\delta(z-z_j) \tag{A.92}$$

となる．したがって型式にこだわらずに言えば，δ 関数とは引数が 0 になるところを除いて至るところ 0 であり，引数が 0 になるところでは性質 (A.90), (A.91) が成り立つように積分が 1（単位面積）になる程度に無限大になる関数である，と考えることができる．このような不思議な関数は本当に存在するであろうか．実は，今述べたような雑な概念では数学的に受け入れられる関数を定義できない．“δ 関数”の使用は，“超関数”あるいは“一般化関数”の概念を

導入すれば，より適切に基礎づけることができる．大ざっぱに言えば，“δ 関数”は，上の条件に収束するような性質を持つ関数列の極限として考えることができる．その意味で，次の関数はすべて δ 関数を近似するものである．

$$\delta(x)=\begin{cases}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} & -\varepsilon/2\leqslant x\leqslant \varepsilon/2 \text{ について} \\ 0 & |x|>\varepsilon/2 \text{ について}\end{cases} \tag{A.93}$$

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \tag{A.94}$$

$$\delta(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(Nx)}{x} \tag{A.95}$$

最初の表現(A.93)は本質的に式(A.86)，(A.87)と同じで，第二の表現式(A.94)は第一のものを“滑らかにならした”ものである．第三の表現(A.95)は図 A.3 に概略の形を描いておいた．N が無限大に近づくと，中央の山は無限に高くか

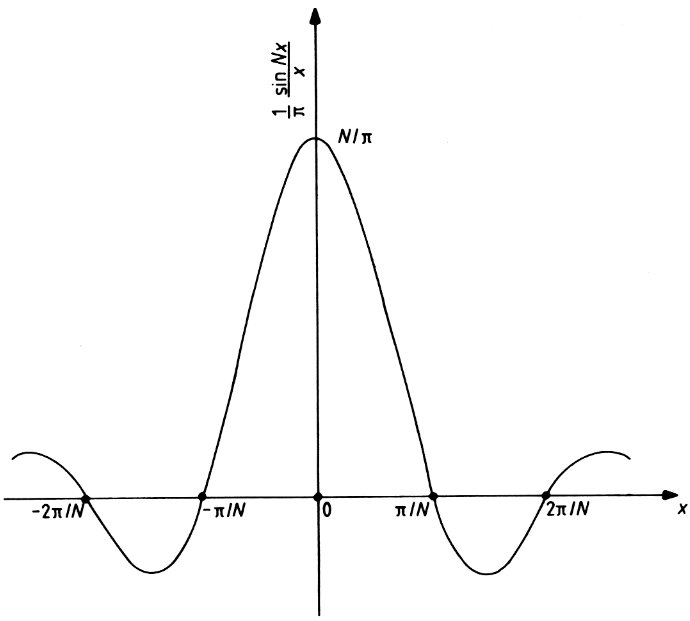


図 A.3　有限な N に対する関数 (A.95)

つ狭くなるが，依然単位面積を保持している．

普通，積分記号下では，δ 関数を操作して数学的に正しくない結果を生ずる危険はない．しかし，2 つの超関数の積に遭遇したときは注意しなくてはならない．

A. 4. 2 Fourier 級数および Fourier 変換のまとめ

Fourier の定理は，しかるべきまともな性質を持つ周期 L の周期関数が次のように展開できることを保証する．

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\pi x/L} \tag{A.96}$$

直交化の関係

$$\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx/L}\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx/L}\mathrm{d}x=\delta_{mn} \tag{A.97}$$

と Krönecker の δ 記号

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & のときは m=n \\ 0 & のときは m\neq n\end{cases} \tag{A.98}$$

を用いて，展開係数は次のように決められる．

$$a_m=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx/L}\mathrm{d}x \tag{A.99}$$

これらの表式で $L\to\infty$ の極限を考えよう．まず

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\Delta n \tag{A.100}$$

と書き，係数 F_n は

$$F_n=a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx/L} \tag{A.101}$$

区間 $\Delta n=1$ とおくことができる．次に

$$2\pi n/L=k \tag{A.102}$$

$$La_n=g(k) \tag{A.103}$$

を定義し，$L\to\infty$ の極限をとると

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{d}n \tag{A.104}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{L}\cdot\frac{L\mathrm{d}k}{2\pi} \tag{A.105}$$

が得られる．したがって

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{A.106}$$

が成り立ち，式(A.99) から

$$g(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{A.107}$$

が出る．これらが Fourier 変換の関係式で，Dirac の δ 関数の重要な表示を導く．

式(A.107) の $g(k)$ を式(A.106) に代入すれば

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}f(x') \tag{A.108}$$

が得られる．積分の順序を変えると

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'f(x')\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\mathrm{d}k\right) \tag{A.109}$$

が任意の関数 $f(x)$ について成り立つ．したがって表式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\mathrm{d}k \tag{A.110}$$

は顕著な性質，すなわち $x=x'$ 以外のあらゆる所で 0 となり，x を含む任意の区間 x' について積分すると 1 になる，という性質は持つ．言い換えれば，式(A.110) は Dirac の δ 関数の新しい表現である．

$$\boxed{\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k} \tag{A.111}$$

式(A.111) は極めて重要である．これが δ 関数の一番普通に用いられる表式であり，本書の至る所に出現する．また式(A.111)の上限下限を N および $-N$ で置き換え，$N\to\infty$ の極限をとるとまさしく式(A.95) となる．

積分(A.111) は，すべての波数に同一の均一な重み $(2\pi)^{-1}$ をかけて平面波を重ね合わせたものである．物理的には単位関数の Fourier 変換と考えることができる (式(A.106) 参照)．積分(A.111) は，位相のパラメーター x がゼロでない限りこれら平面波すべての寄与は完全に打ち消し，$x=0$ のときは積分は明らかに発散して予想したごとく“$\delta(0)$ は無限大”になることを主張している．定数の Fourier 変換が δ 関数になる事実は，Fourier 変換の理論の波長帯幅の定理の極端な場合にあたっている．定理は，関数 $g(k)$ の(しかるべく定義された)

“ひろがり”を Δk，その Fourier 変換 $f(x)$ のひろがりを Δx とすれば，$\Delta x \cdot \Delta k \geqq 1/2$ であることを主張する．いまの場合 Δk が無限大に，Δx が無限小に近迫する場合である．

式(A.111) を利用する非常にありふれた例は，平面波の規格化である．式(A.111) を

$$\delta(k'-k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik'x}}{(2\pi)^{1/2}}\cdot\frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{1/2}}dx \tag{A.112}$$

の形に書き直すと，波動関数 $e^{ikx}/(2\pi)^{1/2}$ と $e^{ik'x}/(2\pi)^{1/2}$ が $k \neq k'$ のときは実軸上 $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ で直交し（左辺が 0)，$k=k'$ のときはその重なりが無限大になるが，重なりの積分は 1 になるようにふるまう，と解釈することができる．これは式(A.97)のように離散的な指標で表示された波動関数の直交性を，連続指標の場合に類推したものである．式(A.112)の中の平面波を，“δ 関数に規格化されている”という．しかし問題が 1 つあって，平面波は二乗積分可能でないから，厳密に言えば Hilbert 空間に属さない．このような事情に関心を持つ数理物理学者は，このような規格化が許されるような“しかけをした”Hilbert 空間を導入することでつじつまを合わせている．本文ではしばしば“箱の中の規格化”（空間を有限体積 V に制限する）を用いているように見えるが，実際は平面波の積分を勘定するときに上下限を無限大に拡張して，式(A.112) のような結果を繰り返し用いている．

A. 4. 3 δ 関数の諸性質

(i)
$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{A.113}$$

証明. $a>0$ であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\frac{dy}{a}=\frac{1}{a} \tag{A.114}$$

$a<0$ であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)dx=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(y)\frac{dy}{a}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\frac{dy}{|a|}=\frac{1}{|a|} \tag{A.115}$$

(ii)
$$\delta(x)=\delta(-x), \quad \text{偶関数} \tag{A.116}$$

証明.

$$f(0)=\int\delta(x)f(x)dx \tag{A.117}$$

であるからもし $f(x)$ が奇関数なら $f(0)=0$ である．したがって $\delta(x)$ は偶関数でなくてはならない．

iii)
$$\delta(f(x))=\sum_i \frac{1}{|\mathrm{d}f/\mathrm{d}x|_{x=a_i}}\delta(x-a_i) \tag{A.118}$$

ただし a_i は $f(x)=0$ の根である．

証明．δ 関数は引数が 0 になるところでだけ 0 でない．したがってわれわれは $f(x)=0$ の根に深い関心がある．根 a_i

$$f(a_i)=0 \tag{A.119}$$

の近傍で Taylor 展開

$$f(x)=\cancel{f(a_i)}+(x-a_i)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a_i}+\cdots \tag{A.120}$$

を行う．したがって δ 関数は根 a_i のそれぞれから 0 でない寄与を生じ，その形は

$$\delta(f(x))=\sum_i \delta\left[(x-a_i)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a_i}\right] \tag{A.121}$$

となる．したがって性質（i）より

$$\delta(f(x))=\sum_i \frac{1}{|\mathrm{d}f/\mathrm{d}x|_{x=a_i}}\delta(x-a_i) \tag{A.122}$$

である．例として

$$\delta(x^2-a^2) \tag{A.123}$$

を考える．因数分解

$$f(x)=x^2-a^2=(x-a)(x+a) \tag{A.124}$$

より 2 つの根 $x=\pm a(a>0)$ および $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x=2x$ を得るから次の公式が出る．

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \tag{A.125}$$

iv)
$$x\delta(x)=0 \tag{A.126}$$

この式はつねに積分記号下で成り立つと考えなくてはならない．定義あるいは性質（ii）より明らか．

v)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x=-f'(0) \tag{A.127}$$

ここで

$$\delta'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) \tag{A.128}$$

である．

証明．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x&=-\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x+\cancel{[f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{\infty}}\\&=-f'(0)\end{aligned} \tag{A.129}$$

より表面項が 0 になる．

(vi)
$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x'-a)\mathrm{d}x'=\theta(x-a) \tag{A.130}$$

ただし $\theta(x)$ はシータ関数（または階段関数）

$$\theta(x)=\begin{cases}0 & \text{について } x<0\\ 1 & \text{について } x>0\end{cases} \tag{A.131}$$

である．

証明．
$$x>a \text{ であれば}\quad \int_{-\infty}^{x}\delta(x'-a)\mathrm{d}x'=1 \tag{A.132}$$

$$x<a \text{ であれば}\quad \int_{-\infty}^{x}\delta(x'-a)\mathrm{d}x'=0 \tag{A.133}$$

この簡単な拡張として次の結果

$$\int_{x_1}^{x_2}\delta(x-a)\mathrm{d}x=\theta(x_2-a)-\theta(x_1-a) \tag{A.134}$$

を示すのは容易である．

演習，性質(iii)，およびシータ関数の定義を用いて p^0 積分を行い，相空間の重要公式

$$\int\mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}/2E \tag{A.135}$$

を導け．ただし

$$p^2=(p^0)^2-\boldsymbol{p}^2 \tag{A.136}$$

$$E=+(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2} \tag{A.137}$$

である．

付録 B　自然単位系

素粒子物理学で広く用いられている習慣は

$$\boxed{\hbar = c = 1} \tag{B.1}$$

とおく自然単位系で計算を行うことである．この単位系を用いると，計算全体を通じて $\hbar$ や c のさまざまな因子を省略でき，最後の結果だけを普通の単位に転換すればよいことになる．c および $\hbar$ を単位に選んだ含みを説明しておこう．

（i）　$c=1$

通常の MKS 単位系では

$$c \simeq 3\times10^{8}\ \mathrm{ms^{-1}} \tag{B.2}$$

という数値を持つ．

$$c=1 \tag{B.3}$$

になる単位を選ぶと，速度の次元が

$$[c]=[\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-1} \tag{B.4}$$

であるから，長さの単位と時間の単位は同じ数値を持つことになる．この意味で長さと時間は同等な次元を持つ．

$$[\mathrm{L}]=[\mathrm{T}] \tag{B.5}$$

同様に，特殊相対論のエネルギーと運動量の関係式

$$E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4 \tag{B.6}$$

より，$c=1$ とおけば，エネルギー・質量・運動量はすべて同等の次元を持つことがわかる．実際，運動量を MeV/c あるいは GeV/c の単位で呼ぶことはごく普通であり，これほど一般化してはいないが質量も MeV/c^2 あるいは GeV/c^2 の単位で呼ばれることがある．$c=1$ であればこれらはすべて MeV あるいは GeV となる．

（ii） $\hbar=1$

Planck 定数の数値は

$$\hbar \simeq 6.6\times10^{-22}\ \mathrm{MeVs} \tag{B.7}$$

で，その次元はエネルギーと時間の積

$$[\hbar]=[\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-1} \tag{B.8}$$

である．$\hbar=1$ とおくことは，質量・長さ・時間の単位の間にある関係を設定することになる．すでに $c=1$ と選んで長さと時間が同格であるから，質量を自然単位系における唯一の独立な次元に選ぶことができる．

$$\boxed{[\mathrm{M}]=[\mathrm{L}]^{-1}=[\mathrm{T}]^{-1}} \tag{B.9}$$

例：パイオンの Compton 波長

自然単位系を慣用単位系に変換するには，どうすればよいであろうか．パイオンの Compton 波長

$$\lambda_\pi=\hbar/M_\pi c \tag{B.10}$$

を自然単位系と慣用単位系で算出してみよう．自然単位系では

$$\lambda_\pi=1/M_\pi \tag{B.11}$$

である．ただし $M_\pi=140\ \mathrm{MeV}/c^2$ である．慣用単位系ではこの M_π の値と，$\hbar$ の値 (B.7) および c の値 (B.2) を用いて

$$\lambda_\pi \simeq 1.41\ \mathrm{fm} \tag{B.12}$$

である．ここで，単位“フェルミ”（あるいはフェムト・メーター）fm は

$$1\ \mathrm{fm}=10^{-15}\ \mathrm{m}$$

である．したがって

$$\boxed{\lambda_\pi=1/M_\pi \simeq 1.41\ \mathrm{fm}} \tag{B.13}$$

という対応が成り立つ．

断面積の実用的計算

式 (B.2) および式 (B.7) より直接

$$\boxed{\hbar c \simeq 200\ \mathrm{MeV\ fm}} \tag{B.14}$$

というきわめて覚えやすい結果が導かれる．したがって，自然単位系では

$$\boxed{1\ \mathrm{fm} \simeq \frac{1}{200\ \mathrm{MeV}} = 5\ (\mathrm{GeV})^{-1}} \tag{B.15}$$

という関係が成立する．断面積は自然単位系ではいっさい c や $\hbar$ を含まず，すべての質量やエネルギーや運動量はふつう MeV，GeV という単位で示される．結果を面積で表すには，断面積の次元が

$$[\sigma]=[\mathrm{L}]^2=[\mathrm{M}]^{-2} \tag{B.16}$$

であることに注目するだけでよい．質量・運動量・エネルギーを GeV 単位ではかれば，式 (B.15) より有用な関係

$$\boxed{\left(\frac{1}{1\ \mathrm{GeV}}\right)^2 = 1\ (\mathrm{GeV})^{-2} = 0.38939\ \mathrm{mb}} \tag{B.17}$$

を得る．（式(B.14)のより精確な関係は $\hbar c = 197.328\ \mathrm{MeV \cdot fm}$ である．）ここにミリ・バーン mb は面積の単位で

$$1\ \mathrm{mb} = 10^{-31}\ \mathrm{m}^2$$

である．“典型的”なハドロン反応断面積は，ほぼ λ_π^2 の面積になる．

$$\lambda_\pi^2 = 1/M_\pi^2 \simeq 20\ \mathrm{mb}$$

電磁過程の断面積はこれより 1 桁小さい．$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散乱の最低次の断面積は，s を $(\mathrm{GeV})^2$ ではかれば

$$\sigma \approx \frac{88}{s}\mathrm{nb}$$

である（ナノ・バーン $\mathrm{nb}=10^{-6}\ \mathrm{mb}$）．

付録 C Maxwell方程式と単位系の選択

高エネルギー物理学では，Maxwell 方程式を扱うときに，有理 MKS 単位系は用いない習慣である．議論は常に真空中の場の方程式に限られるから，方程式ができるだけ簡単な形をとるような単位系を採用することが望ましい．特に，MKS 単位系で用いられる定数 ε_0，μ_0 が現れないような形がよい．これら 2 つの定数は，もちろん，それぞれ Coulomb および Ampère の力の法則を通じてはいってくるものである．これらの法則は，力学的物理量（力）を電気的物理量（電荷・電流）に結びつけている．Coulomb の法則

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{C.1}$$

に ε_0 を導入することは，電気的な単位の 1 つを，力学的な単位（質量・長さ・時間）とは独立にえらび，それに次元を与えることを可能にする．たとえば，MKS 単位系のように，クーロンを基本的な電気的物理量としてとれば，ε_0 は $(\text{クーロン})^2\cdot[\mathrm{T}]^2/[\mathrm{M}]\cdot[\mathrm{L}]^3$ という次元を持つ．これから普通の実用単位（ボルト，アンペア，クーロンなど）を，場と回路に対して採用することができる．しかし素粒子の物理学では，実用的な回路ではなく場の方程式しか用いないから，実用単位系の利点は的外れである．この場合は，場の方程式ができるだけ簡単な形をとるように，電気的単位を力学的単位で定義することが望ましい．式(C.1)に相当する場の方程式は Gauss の法則

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0 \qquad (\text{MKS 単位系}) \tag{C.2}$$

であって，明らかに，電気量（電荷）の単位を ε_0 が 1 になるようにとれば簡単になる．力学的物理量に CGS 単位系を採用するこのような単位系が，“Gauss の CGS 単位系”の静電気部分の一変形である．もともとの Gauss 単位系では $\varepsilon_0\to1/4\pi$ とおく．こうすれば力の法則式(C.1)は簡単になるが，その補償として場の方程式(C.2) に 4π がはいってくる．実は，場の方程式のほうが根本で

あって，4π は 3 次元という特定の場合にだけ妥当な幾何学的因子にすぎない．したがって，因子 4π は一般的な妥当性を持つ方程式の中には，はいってくるべきではない．式(C.2)の中の ε_0 を 1 とおいた単位系は，“有理化 Gauss 単位系”，あるいは “Heaviside-Lorentz 単位系” と呼ばれる．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho \qquad \text{(Heaviside-Lorentz 単位系)} \tag{C.3}$$

一般に，因子 4π が場の方程式には顔を出さず，力の法則に現れるような単位系を，有理化単位系と呼んでいる．

もちろん，式(C.3)はHeaviside-Lorentz 単位系で書いた Maxwell 方程式の一部にすぎない．Gauss 単位系では，Ampère の力の法則

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{j_1\times(j_2\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}\mathrm{d}^3r_1\mathrm{d}^3r_2 \tag{C.4}$$

の中の μ_0 は 4π とおかれ，それによって電流の単位（電磁単位あるいはビオ）が定義される．電荷の単位（静電単位あるいはフランクリン）は，すでに $\varepsilon_0=1/4\pi$ とおいて（Gauss 単位系）定義されている．これら 2 つの単位系の比は，基本的自然定数であって，光速度 c になる．Gauss 単位系では，電荷を $\varepsilon_0\to1/4\pi$ によりかつ電流を $\mu_0\to4\pi$ によって定義し，c があからさまに場の方程式に現れる．この単位系を有理化すると Heaviside-Lorentz 単位系となる．$\varepsilon_0\to1$，$\mu_0\to1$ とおくと残りの Maxwell 方程式は

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{C.5}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{C.6}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{C.7}$$

である．

電磁理論の単位系については，さらに詳しい議論が Panofsky-Phillips (1962) の付録に載っている．

最後に，本書全体を通じて，質量・長さ・時間については $\hbar=c=1$（付録 B 参照）という特別な選び方をしてきた．この場合は，式(C.3)，(C.5)，(C.6)，(C.7) の中で $c=1$ と置き換える．

本書で採用した単位系は高エネルギー物理学で一般に用いられているが，この単位系と MKS 単位系との関係を示す一例として，微細構造定数 α が次のよ

うに書けることを注意しておこう．

$$
\alpha=\begin{cases} \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} & \text{MKS 単位系} \qquad \text{(C.8)} \\ \dfrac{e^2}{4\pi} & \text{Heaviside-Lorentz 単位系および } \hbar=c=1 \qquad \text{(C.9)} \end{cases}
$$

明らかに α の数値（~1/137）はどちらの単位系でも同じである．しかし式 (C.8)，(C.9) の中の"e"の数値はもちろん異なっている．

Maxwell 方程式に有理化 MKS 単位系を用いることは，国際単位系（SI）の一部である．この単位系では μ_0 と ε_0 の数値は

$$
\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,(\mathrm{kgmC^{-2}=Hm^{-1}}) \tag{C.10}
$$

および $\mu_0\varepsilon_0=1/c^2$ より

$$
\varepsilon_0=\frac{10^7}{4\pi c^2}\simeq\frac{1}{36\pi\times10^9}\,(\mathrm{C^2s^2kg^{-1}m^{-3}=Fm^{-1}}) \tag{C.11}
$$

である．

付録 D　Dirac代数と対角和の諸定理

D. 1　Dirac 代数

D. 1. 1　γ 行列

基本的な反交換関係

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{D.1}$$

を用いて，次の諸公式を証明することができる．

$$\gamma_\mu\gamma^\mu=4 \tag{D.2}$$

$$\gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu=-2\not{a} \tag{D.3}$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma^\mu=4a\cdot b \tag{D.4}$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu=-2\not{c}\not{b}\not{a} \tag{D.5}$$

$$\not{a}\not{b}=-\not{b}\not{a}+2a\cdot b \tag{D.6}$$

一例として式(D.6) を証明してみよう．

$$\begin{aligned}\not{a}\not{b}&=a_\mu b_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\\&=a_\mu b_\nu(-\gamma^\nu\gamma^\mu+2g^{\mu\nu})\\&=-\not{b}\not{a}+2a\cdot b\end{aligned}$$

D. 1. 2　γ_5 の性質

γ_5 を

$$\gamma_5\equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{D.7}$$

で定義する．通例の表示では

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} \tag{D.8}$$

であるから，γ_5 は

$$\gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{D.9}$$

で表される．定義，あるいは明らさまな行列の形から

$$\gamma_5^2=1 \tag{D.10}$$

および

$$\{\gamma_5,\ \gamma^\mu\}=0 \tag{D.11}$$

がたやすく証明される．すなわち，γ_5 はすべての γ 行列と反交換し，2 乗は単位行列である．完全反対称テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases} +1 & 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \text{の偶順列に対して} \\ -1 & 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \text{の奇順列に対して} \\ \ \ 0 & 2\ \text{つ以上の指標が同じとき} \end{cases} \tag{D.12}$$

で定義すると，γ_5 は

$$\gamma_5=\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{D.13}$$

と表すこともできる．この形から

$$\gamma_5\gamma_\sigma=\frac{\mathrm{i}}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \tag{D.14}$$

および恒等式

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho=g^{\mu\nu}\gamma^\rho-g^{\mu\rho}\gamma^\nu+g^{\nu\rho}\gamma^\mu+\mathrm{i}\gamma_5\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma \tag{D.15}$$

を導くことができる．

D. 1. 3　スピノール行列要素のエルミート共役

Γ が γ 行列の任意の積の和であるとき

$$[\bar{u}(p',\ s')\Gamma u(p,\ s)]^\dagger=\bar{u}(p,\ s)\bar{\Gamma}u(p',\ s') \tag{D.16}$$

$$\bar{\Gamma}\equiv\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{D.17}$$

である．たとえば

$$\overline{\gamma^\mu}=\gamma^\mu \tag{D.18}$$

$$\overline{\gamma^\mu\gamma_5}=\gamma^\mu\gamma_5 \tag{D.19}$$

が成り立つ．

D. 1. 4　スピン和と射影演算子

正エネルギー状態への射影演算子

$$[\Lambda_+(p)]_{\alpha\beta} \equiv \sum_s u_\alpha(p,\ s)\bar{u}_\beta(p,\ s) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \tag{D.20}$$

負エネルギー状態への射影演算子

$$[\Lambda_-(p)]_{\alpha\beta} \equiv -\sum_s v_\alpha(p,\ s)\bar{v}_\beta(p,\ s) = (-\not{p} + m)_{\alpha\beta} \tag{D.21}$$

これらの表式はスピノールの規格化が

$$\bar{u}u = 2m \qquad \bar{v}v = -2m \tag{D.22}$$

で与えられる特定の場合にのみ成立することに注意せよ.

D. 2　対角和（跡）の定理

(1)
$$\mathrm{Tr}\ \mathbf{1} = 4 \tag{D.23}$$

(2)
$$\mathrm{Tr}\ \gamma_5 = 0 \tag{D.24}$$

(3)
$$\mathrm{Tr}\,(\text{奇数個の}\ \gamma) = 0 \tag{D.25}$$

証明.　奇数の n に対して

$$T \equiv \mathrm{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n) \tag{D.26}$$

を考える. $1 = (\gamma_5)^2$ を最後に挿入すれば

$$T = \mathrm{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5) \tag{D.27}$$

である.

$$\not{a}\gamma_5 = -\gamma_5\not{a} \tag{D.28}$$

をくり返し用いて, T の中の最初の γ_5 を一番前に移動すると n 個の負号が現れる.

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Tr}(\not{a}_1\cdots\not{a}_n) = (-1)^n\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma_5) \\ &= (-1)^n\mathrm{Tr}(\not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5)\ \text{（対角和の循環的性質）} \\ &= -\mathrm{Tr}(\not{a}_1\cdots\not{a}_n)\ \text{（}n\text{ が奇数の場合）} \end{aligned} \tag{D.29}$$

したがって n が奇数であれば T は 0 である.

(4)
$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a\cdot b \tag{D.30}$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}) \\ &= \frac{1}{2}a_\mu b_\nu \mathrm{Tr}(\mathbf{1}\cdot 2g^{\mu\nu}) \\ &= 4a\cdot b \end{aligned}$$

(5) $$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4[(a\cdot b)(c\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)-(a\cdot c)(b\cdot d)] \tag{D.31}$$

証明. 式(D.6) の結果を用いれば

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}(\not{c}\not{d})-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{a}\not{c}\not{d}) \tag{D.32}$$

が成り立つ．これは対角和の中で $\not{a}$ を 1 つ右へ移す公式である．こうして $\not{a}$ を右へ右へと移しかえ，式(D.30) を用いれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})&=2(a\cdot b)4(c\cdot d)-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}(\not{b}\not{d})+\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{a}\not{d})\\&=8(a\cdot b)(c\cdot d)-8(a\cdot c)(b\cdot d)+8(b\cdot c)(a\cdot d)-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{d}\not{a})\end{aligned} \tag{D.33}$$

を得る．対角和の中で，最後の因子を最初に持ってきても対角和の値は変わらないから，証明終わり．

(6) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}]=0 \tag{D.34}$$

γ_5 は 4 個の γ 行列の積だから，これは(3)の特別な場合である．

(7) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}\not{b}]=0 \tag{D.35}$$

これは(6)ほど自明ではない．しかし γ 行列の積をあからさまに書き上げれば，γ の反可換性からただちに証明することができる．

(8) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}]=0 \tag{D.36}$$

再び(3)の特別な場合である．

(9) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}]=4\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \tag{D.37}$$

α, β, γ, δ に 0, 1, 2, 3 のいろいろな数値を指定して考察すればよい．ε テンソルは順列に対して正しい符号を与える．

ε テンソルは，3 次元の反対称テンソル ε_{ijk} の 4 次元的拡張である．3 次元の場合はよく知られた関係式

$$(b\times c)_i=\varepsilon_{ijk}b_jc_k \tag{D.38}$$

$$a\cdot(b\times c)=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k \tag{D.39}$$

が成り立つ．

付録 E　断面積の計算例

6. 3 節から 6. 5 節で論じた π^+e^- 弾性散乱の断面積の計算をもう少し詳しく述べる．問題 5.4 の結果を用いると，偏りのない場合の断面積は

$$d\bar{\sigma}=\frac{1}{4E\omega|\boldsymbol{v}|}\frac{1}{2}\sum_{ss'}|F_{ss'}|^2 \mathrm{dLips}(s\,;\,k',\ p') \tag{E.1}$$

$$=\frac{1}{4[(k\cdot p)^2-m^2M^2]^{1/2}}\frac{1}{2}\sum_{ss'}|F_{ss'}|^2 \mathrm{dLips}(s\,;\,k',\ p') \tag{E.2}$$

である．Lorentz 不変な相空間の体積の定義は

$$\mathrm{dLips}(s\,;\,k',\ p')\equiv(2\pi)^4\delta^4(k'+p'-k-p)\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \tag{E.3}$$

である．行列要素および相空間の積分を重心系で行い，結果を不変式で書くかわりに，計算をすべて“実験室”系で行うことにする．実験室系とは

$$\boxed{p^\mu=(M,\ 0)} \tag{E.4}$$

が成立する座標系である．弾性散乱に対して実験室系の運動学がどうなるか，少し詳しく調べてみよう（図 E.1 参照）．エネルギー・運動量の保存

$$p'^2=(p+q)^2 \tag{E.5}$$

から p' を消去すると，弾性散乱の条件

$$2p\cdot q+q^2=0 \tag{E.6}$$

あるいは

$$\boxed{2p\cdot q=Q^2} \tag{E.7}$$

を得る．ここで散乱過程に対して正の量 Q^2 を

$$Q^2=-q^2 \tag{E.8}$$

で定義した．

高エネルギーの電子に対しては，電子質量の効果を無視することはよい近似

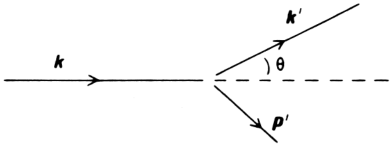


図 E．1

であって，本書で論ずる問題にはすべてこの近似があてはまる．そこで

$$k^2 = k'^2 \simeq 0 \tag{E.9}$$

とおくと

$$s + t + u \simeq 2\boldsymbol{M}^2 \tag{E.10}$$

が成立する．ただし s，t，u は Mandelstam 変数といい

$$s = (k+p)^2 = (k'+p')^2 \tag{E.11}$$

$$t = (k-k')^2 = (p'-p)^2 = q^2 \tag{E.12}$$

$$u = (k-p')^2 = (k'-p)^2 \tag{E.13}$$

で定義される．電子の 4 元運動量

$$k^\mu = (\omega,\ \boldsymbol{k}) \tag{E.14}$$

$$k'^\mu = (\omega',\ \boldsymbol{k}') \tag{E.15}$$

に対しては，3 元運動量の大きさとエネルギーとの違いを無視することができる．

$$\omega \simeq |\boldsymbol{k}| \equiv k \tag{E.16}$$

$$\omega' \simeq |\boldsymbol{k}'| \equiv k' \tag{E.17}$$

この近似のもとでは

$$q^2 = -2kk'(1-\cos\theta) \tag{E.18}$$

あるいは

$$\boxed{q^2 = -4kk'\sin^2(\theta/2)} \tag{E.19}$$

が成立する．弾性散乱の条件(E.7) は，k，k'，θ の間に関係

$$(k/k') = 1 + (2k/M)\sin^2(\theta/2) \tag{E.20}$$

を与える．この関係は，弾性散乱の場合にのみ成り立つことを強調しておく必

要がある．電子の包含非弾性散乱では，k，k'，θ はすべて独立な変数である．

式(E.2) の中の第1項はフラックス因子であるが，電子質量mを無視する近似では簡単に計算できて

$$4[(k\cdot p)^2-m^2M^2]^{1/2}\simeq 4Mk \tag{E.21}$$

である．次に，スピン(偏り)で平均した行列要素と相空間の積分を計算しよう．

E. 1　スピンで平均した行列要素の2乗

πe 散乱のFeynman 規則から，スピン変数の和を

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|F_{ss'}|^2=\left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{E.22}$$

の形に書くことができる．ここに $L_{\mu\nu}$ はレプトンのテンソル，$T^{\mu\nu}$はパイオンのテンソルを表し，1光子交換の近似を用いている．問題 6.4 および問題 6.5 からテンソルの縮約の結果は

$$L_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=8[2(k\cdot p)(k'\cdot p)+(q^2/2)M^2] \tag{E.23}$$

である．実験室系では，電子の質量を無視する近似で

$$L_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=16M^2kk'\cos^2(\theta/2) \tag{E.24}$$

となる．

E. 2　実験室系の変数による2体の Lorentz 不変相体積の計算

さて式(E.3) あるいは

$$\mathrm{dLips}(s\,;k',\ p')=\frac{1}{(4\pi)^2}\delta^4(k'+p'-k-p)\frac{\mathrm{d}^3p'}{E'}\frac{\mathrm{d}^3k'}{\omega'} \tag{E.25}$$

を実験室系の変数を用いて算出しよう．この計算はいささか技巧的で注意を要する．計算を行うにはいくつかのやり方がある．

(a)　重心系の変数を用いて計算し，断面積を不変式の形で求めて，その後に実験室系に変換する．そのためには $\mathrm{d}q^2$ を $\mathrm{d}(\cos\theta)$ に結びつける表式が必要であるが，それはこの付録の最後に例題として示す．

(b)　直接に実験室系の変数のみを用いて書き表すと

$$\mathrm{d}^3p'/2E'=\mathrm{d}^4p'\delta(p'^2-M^2)\theta(p'^0) \tag{E.26}$$

のように書ける．4次元のデルタ関数によって4次元積分 d^4p' を行えば，1次元

のデルタ関数 $\delta(p'^2-M^2)$ を含む積分にかわる．ここに p' は $k+p-k'$ で置き換えるものとする．最後の積分については，Bjorken-Drell (1964) の p.114 を参照せよ．

(c) 相空間の体積をもっと具体的に計算することもできる．式(E.25)の 4 次元デルタ関数のうち 3 次元デルタ関数の因子を用いて d^3p' を行えば，実験室系では $\boldsymbol{p}=0$ であるから

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\delta^3(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})f(\boldsymbol{p}',\ \boldsymbol{k}',\ \boldsymbol{k})=f(\boldsymbol{p}',\ \boldsymbol{k}',\ \boldsymbol{k})\Big|_{\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'} \tag{E.27}$$

が得られる．関数 $f(\boldsymbol{p}',\ \boldsymbol{k}',\ \boldsymbol{k})$ に関しては，$\boldsymbol{p}'$ は E' を通じてのみ現れると要求することができる．なぜなら電子質量 m を 0 においた近似で

$$E'^2=\boldsymbol{p}'^2+M^2 \tag{E.28}$$

$$\boldsymbol{p}'^2=k^2+k'^2-2kk'\cos\theta \tag{E.29}$$

が成立するからである．d^3k' を角変数に変換すると

$$\mathrm{d}^3k'/\omega'\simeq k'\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega \tag{E.30}$$

であるから，相空間の体積は

$$\mathrm{dLips}(s\ ;k',\ p')=\frac{1}{(4\pi)^2}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}k'\frac{k'}{E'}\delta(E'+k'-k-M) \tag{E.31}$$

となる．式(E.28)，(E.29)からわかるように，k が指定されたとき E' は k' と θ の関数であるから，デルタ関数は k' と θ を弾性散乱の条件式 (E.20) で結びつける．しかし，デルタ関数を含む積分を遂行するまでは，k' と θ は独立な変数である．残った積分は

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\int \mathrm{d}\Omega\mathrm{d}k'\frac{k'}{E'}\delta(f(k',\ \cos\theta)) \tag{E.32}$$

で表され，$f(k',\ \cos\theta)$ は

$$f(k',\ \cos\theta)=[(k^2+k'^2-2kk'\cos\theta)+M^2]^{1/2}+k'-k-M \tag{E.33}$$

で定義される．微分断面積を得るには k' について積分しなくてはならない．k' 積分を行うには $f(k',\ \cos\theta)$ の中の $\cos\theta$ を定数とみなし，式(A.118)

$$\delta(f(x))=\frac{1}{|f'(x)|_{x=x_0}}\delta(x-x_0) \tag{E.34}$$

を用いる．ここに $f(x_0)=0$ である．微係数

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k'}\right|_{\cos\theta\ 一定}=\frac{1}{E'}(E'+k'-k\cos\theta) \tag{E.35}$$

と，k' が弾性散乱条件によって k と θ から決まるというデルタ関数の効果により

$$k'=\frac{k}{1+(2k/M)\sin^2(\theta/2)}\equiv k'(\cos\theta) \tag{E.36}$$

が成り立つ．これから

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\int \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}k'\frac{k'}{E'}\frac{1}{\left|\mathrm{d}f/\mathrm{d}k'\right|_{k=k'(\cos\theta)}}\delta[k'-k'(\cos\theta)] \tag{E.37}$$

となるが，$k'=k'(\cos\theta)$ で評価した $\mathrm{d}f/\mathrm{d}k'$ は，少し変形すると

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k'}\right|_{k'=k'(\cos\theta)}=\frac{Mk}{E'k'} \tag{E.38}$$

と書ける．したがってレプトン質量を無視した近似で，二体弾性散乱の相体積を“実験室”系の変数で表せば

$$\boxed{\mathrm{dLips}(s\ ;k',\ p')=\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{k'^2}{Mk}\mathrm{d}\Omega} \tag{E.39}$$

である．

以上の諸結果を 1 つにまとめると，最後の結果は

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{ns}}\equiv\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4k^2\sin^4(\theta/2)}\frac{k'}{k}\cos^2(\theta/2) \tag{E.40}$$

である．

最後のひとひねりとして，弾性散乱の場合に変数を $\mathrm{d}\Omega$ から $\mathrm{d}q^2$ に変換してみよう．偏りがない場合は

$$\mathrm{d}\Omega=2\pi\mathrm{d}(\cos\theta) \tag{E.41}$$

$$q^2=-2kk'(1-\cos\theta) \tag{E.18}$$

$$k'=\frac{k}{1+(2k/M)\sin^2(\theta/2)} \tag*{(E.20)$'$}$$

である．したがって k' と $\cos\theta$ は独立な変数ではなく，

$$\mathrm{d}q^2=2kk'\mathrm{d}(\cos\theta)+(1-\cos\theta)(-2k)\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}(\cos\theta)}\mathrm{d}(\cos\theta) \tag{E.42}$$

の関係がある．式(E.20) から

$$\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}(\cos\theta)}=\frac{k'^2}{M} \tag{E.43}$$

が得られるから，少しく定石的な計算をすると

$$\boxed{\mathrm{d}q^2=2k'^2\mathrm{d}(\cos\theta)} \tag{E.44}$$

に達する．弾性散乱に対して変数 ν を

$$2p\cdot q\equiv 2M\nu=-q^2 \tag{E.45}$$

で定義すると，ただちに

$$\mathrm{d}\nu=\frac{k'^2}{M}\mathrm{d}(\cos\theta) \tag{E.46}$$

を得る．同様に変数 y を

$$y=\nu/k \tag{E.47}$$

で導入すれば弾性散乱に対して

$$\mathrm{d}y=\frac{k'^2}{2\pi kM}\mathrm{d}\Omega \tag{E.48}$$

が成り立つ．

付録 F　QEDの枝線図形に対するFeynmanの規則

2体→2体反応の断面積

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4[(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2]^{1/2}}|F|^2\mathrm{dLips}(s;p_3p_4) \tag{F.1}$$

振幅 F は考えている過程の不変行列要素で，Feynman 規則によって与えられる．スピンが 0 でない粒子に対しては，偏りを考えない断面積は，初めのスピン成分について平均し終わりのスピン成分については和をとって求める．

F．1　QED の枝(樹)線図形に対する規則

F．1．1　外線粒子

スピン 1/2 の粒子　図形（グラフ）にはいってくるフェルミオンまたは反フェルミオンにはそれぞれスピノール

$$u(p,\ s) \qquad , \qquad v(p,\ s) \tag{F.2}$$

を付す．図形から出ていくフェルミオンまたは反フェルミオンにそれぞれスピノール

$$\bar{u}(p',\ s') \qquad , \qquad \bar{v}(p',\ s') \tag{F.3}$$

を付す．

光子

図形にはいってくる光子線には偏極ベクトル

$$\varepsilon_\mu(k,\ \lambda) \tag{F.4}$$

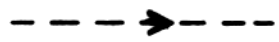
を付し，図形から出てゆく光子線には偏極ベクトル

$$\varepsilon_\mu^*(k',\ \lambda') \tag{F.5}$$

を付す．

F. 1. 2 伝播関数

スピン 0 の粒子



$$=\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2} \tag{F.6}$$

スピン 1/2 の粒子



$$\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m}=\mathrm{i}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2} \tag{F.7}$$

光子

一般的な ξ- ゲージに対して



$$=\frac{\mathrm{i}}{k^2}\left(-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \tag{F.8}$$

計算は通常 $\xi=1$ とおいた Lorentz ゲージ（あるいは Feynman ゲージ）で行う．このとき光子の伝播関数は

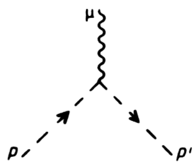


$$=\mathrm{i}\frac{(-g^{\mu\nu})}{k^2} \tag{F.9}$$

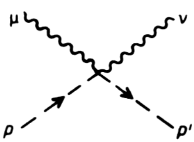
である．

F. 1. 3 頂点

スピン 0 の粒子

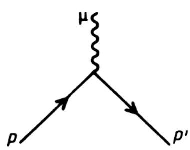


$-\mathrm{i}e(p+p')_\mu$
（電荷 $+e$ に対して） (F.10)



$2\mathrm{i}e^2 g_{\mu\nu}$

スピン 1/2 の粒子



$-\mathrm{i}e\gamma_\mu$
（電荷 $+e$ に対して） (F.11)

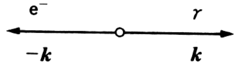
問題略解

《1章》

1.1 (a) はじめの電子の静止系をとりエネルギーと運動量の保存則を書けば

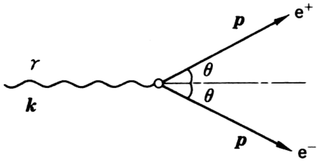
$$m=k+\sqrt{k^2+m^2}$$

となる．mは電子の静止質量，kはγ線光子および終わりの電子の三元運動量の大きさである．この解は$k=0$で，光子も電子も運動できない．



(b) はじめの光子の静止系はない．光子と2つの電子の運動量が作る平面内で，対称性から(あるいは光子の進行方向に垂直な方向の運動量の保存から)，電子と光子の運動方向の成す角θおよび電子の三元運動量の大きさ$|\boldsymbol{p}|=p$は等しい．光子の進行方向についてエネルギーと運動量の保存則を書くと

$$k=2\sqrt{p^2+m^2}, \quad k=2p\cos\theta$$



m は電子の質量である. k を消去すると $p^2\sin^2\theta=-m^2$ となり明らかに矛盾である. したがってこのような崩壊は起こり得ない.

1.2 はじめの2つの世代のクォークについてその内部量子数をまとめておく.

	電荷(単位 e)	ストレンジネス量子数	チャーム量子数
u	2/3	0	0
d	-1/3	0	0
c	2/3	0	+1
s	-1/3	−1	0

(a) ストレンジネス −2 の中間子 $(q\bar{q})$ は存在しない. このような中間子 M があれば $K^-+K^-\to M+\pi$ のような反応で生成し得る.

(b) ストレンジネス +1 のバリオンは $\bar{s}$ を含まなくてはならないから (qqq) 構造にならない. しかしストレンジネス +1 の反バリオン $\bar{\Lambda}=(\bar{u}\bar{d}\bar{s})$ は存在しうる. ストレンジネス +1 の架空のバリオン B の生成反応としては $K^+ + p\to B+\pi$ が考えられる.

《2章》

2. 1 (a) 直接, 一次方程式を解いて $(t,\ x^1)$ を $(t',\ x^{1\prime})$ で表してもよいが, 運動の相対性より $(t',\ x^{1\prime})$ 系からみれば $(t,\ x^1)$ 系は速さ $-v$ で共通の1軸の方向に運動しているから

$$t=\gamma(t'+vx^{1\prime}),\quad x^1=\gamma(vt'+x^{1\prime})$$

である.

t' は t と x^1 で表されるから

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x^1}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x^1}=\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\gamma v\frac{\partial}{\partial x^1}$$

$$=\gamma\left[\frac{\partial}{\partial t}-v\left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\right]$$

$x^{1\prime}$ は t と x^1 で表されるから

$$-\frac{\partial}{\partial x^{1'}}=\frac{-\partial t}{\partial x^{1'}}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial}{\partial x^1}=-\gamma v\frac{\partial}{\partial t}-\gamma\frac{\partial}{\partial x^1}$$
$$=\gamma\left[-v\frac{\partial}{\partial t}+\left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\right]$$

これから$\left(\frac{\partial}{\partial t'},\ -\frac{\partial}{\partial x^{1'}}\right)$と$\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x^1}\right)$の関係は，$(t',\ x^{1'})$と$(t,\ x^1)$との関係と同じである．

(b) 式(2.15) より $\boldsymbol{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}=(\rho_{\mathrm{em}},\ \boldsymbol{j}_{\mathrm{em}})$，および上の(a)の結果より $\partial_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right)$ であるから

$$\partial_\mu \boldsymbol{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}=\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{em}}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}}$$

と書ける．これは式(2.5) である．

2．2 $F^{\mu\nu}=-F^{\mu\nu}$ であるから対角部分$(\mu=\nu)$の成分はすべて 0 である．それ以外の成分は半分だけ独立であるから$(4\times4-4)/2=6$ である．

式(2.17) $\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^{\nu}_{\mathrm{em}}$ の各成分をそれぞれの指標に従って具体的に書く．$F^{\mu\nu}$ は式(2.18)，(2.13) に定義してある．

(i) $\nu=0$

$$\partial_0F^{00}+\partial_1F^{10}+\partial_2F^{20}+\partial_3F^{30}=j^0_{\mathrm{em}} \tag{1}$$

$\partial^\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\nabla\right)$に注意して式(2.10) を参照すれば

$$F^{00}=0$$
$$F^{10}=\partial^1\mathrm{A}^0-\partial^0\mathrm{A}^1=-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}=E_x$$
$$F^{20}=\partial^2\mathrm{A}^0-\partial^0\mathrm{A}^2=-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial t}=E_y$$
$$F^{30}=\partial^3\mathrm{A}^0-\partial^0\mathrm{A}^3=-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}=E_y$$
$$\boldsymbol{j}^0_{\mathrm{em}}=\rho_{\mathrm{em}}$$

したがって(1)の左辺は $\partial_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right)$ に注意して

$$\nabla\boldsymbol{E}=\rho_{\mathrm{em}}$$

これは式(2.1) である．

（ii） $\nu=1$

$$\partial_0 F^{01}+\partial_1 F^{11}+\partial_2 F^{21}+\partial_3 F^{31}=j^1_{\mathrm{em}} \qquad (2)$$

$$F^{01}=\partial^0 \mathrm{A}^1-\partial^1 \mathrm{A}^0=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial_v}{\partial x}=-Ex$$

$$F^{11}=0$$

$$F^{21}=\partial^2 \mathrm{A}^1-\partial^1 \mathrm{A}^2=-\frac{\partial A_x}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial x}=(\nabla \boldsymbol{A})_z=B_z$$

$$F^{31}=\partial^3 \mathrm{A}^1-\partial^1 \mathrm{A}^3=-\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial x}=-(\nabla \boldsymbol{A})_y=-B_y$$

したがって(2)の左辺は

$$-\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=j_{\mathrm{em}}{}^1$$

あるいは $\left(-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\nabla \boldsymbol{B}\right)_x=(\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}})_x$

である．同様に $\nu=2$, 3 の成分をとればこの式の y, z 成分が出る．

$$\therefore \quad -\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\nabla \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}}$$

これは式(2.8) である．

2. 3 $\hat{p}$ は演算子 $-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}$ であるから，任意の関数 $F(x)$ に作用する形で書くとわかりやすい．

$$\begin{aligned}
\hat{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}F(x)&=(\hat{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)})\cdot F(x)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}(\hat{p}F(x))\\
&=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}\right)\cdot F(x)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}\cdot(\hat{p}F(x))\\
&=-q\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}\cdot F(x)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}\cdot \hat{p}F(x)\\
&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}\left(-q\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{p}\right)F(x)
\end{aligned}$$

したがって演算子の関数として

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(x)}\hat{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}=\hat{p}-q\frac{\partial f}{\partial x}$$

である．

《3 章》

3．1　(a)　Schrödinger 方程式

$$-\nabla^2\psi+V\psi-\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \tag{1}$$

の複素共役をとると，ポテンシャル V が実であることを仮定して

$$-\nabla^2\psi^*+V\psi^*+\mathrm{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=0 \tag{2}$$

である．式(1) に ψ^*，式(2)に ψ を乗じて引けば

$$(\psi^*\cdot\nabla^2\psi-\nabla^2\psi^*\cdot\psi)+\mathrm{i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)=0 \tag{3}$$

この第 2 項は明らかに $\partial\rho/\partial t$ である．

ϕ をスカラー関数，$\boldsymbol{A}$ をベクトル関数とするとその積の発散は

$$\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A})=\phi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+(\mathrm{grad}\,\phi,\ \boldsymbol{A})$$

あるいは勾配の演算子 ∇ を用いて

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}$$

である（ベクトル解析の成書参照）．この公式を利用して計算すれば

$$\mathrm{i}\nabla\cdot\boldsymbol{j}=\nabla\cdot[\psi^*(\nabla\psi)-(\nabla\psi^*)\psi]=\psi^*\cdot\nabla^2\psi-\nabla^2\psi^*\cdot\psi$$

である．したがって式 (3) は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

と書ける．

(b)　$\hbar=c=m=1$ ととれば KG 方程式は式(3.8) より

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi+\phi=0 \tag{4}$$

である．その複素共役は

$$\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}-\nabla^2\phi^*+\phi^*=0 \tag{5}$$

(4)に ϕ^* を，(5) に ϕ を乗じて引き算をすれば

$$\left(\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}\phi\right)-(\phi^*\cdot\nabla^2\phi-\nabla^2\phi^*\cdot\phi)=0 \tag{6}$$

式(3.17) により ρ を，式(3.18) により $\boldsymbol{j}$ を定義すれば，問題(a)とまったく平

行な計算で式(3.16)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$$

が導かれる．

平面波の解は式(3.21) より

$$\phi=N\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}},\quad \phi^*=N^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Et-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

であるから，実際に時間と空間の変数について微分を遂行すると

$$\rho=2|N|^2E,\quad \boldsymbol{j}=2|N|^2\boldsymbol{p}$$

である．したがって

$$j^\mu=(\rho,\ \boldsymbol{j})=2|N|^2(E,\ \boldsymbol{p})=2|N|^2p^\mu$$

3．2 (a) 付録 A，式(A.34) より Pauli 行列のあからさまな形は

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

である．i, j, k のすべての組み合わせについて 2 行 2 列の行列の積を実際に計算すれば，交換関係および反交換関係を実際に確かめることができる．交換関係と反交換関係を書き下しておいて足し合わせれば

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}\mathbf{1}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

(b) 参考のために指標についての和をあからさまに示す記法を用いる．

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})=\sum_i\sum_j(\sigma_ia_i)(\sigma_jb_j)=\sum_i\sum_j(a_ib_j)(\sigma_i\sigma_j)$$

$$=\sum_i\sum_j(a_ib_j)(\delta_{ij}\mathbf{1}+\mathrm{i}\sum_k\varepsilon_{ijk}\sigma_k)$$

$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}$ であることに注意して

$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\mathbf{1}+\mathrm{i}\sum_k\sigma_k\cdot(\sum_i\sum_j\varepsilon_{kij}a_ib_j)$$

付録 D の式(D.38) を用いれば

$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\mathbf{1}+\mathrm{i}\sum_k\sigma_k\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\mathbf{1}+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

後半は 2 行 2 列 $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})$ を実際にかけ合わせてみればよい．あるいは上の公式で $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$ とおけば $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}\equiv\mathbf{0}$ となってただちに結果を得る．

3．3 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ に注意して Dirac 方程式中の時空変数の微分を行ってしまえば，スピノールの満たすべき方程式

$$E\omega=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\omega$$

が得られる．ω，$\boldsymbol{\alpha}$，β の行列表示をあからさまに用い

$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\mathbf{1} & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$

スピノールの各成分を比較すれば所期の連立方程式が得られる．

3．4　(a)　与えられた行列 $\boldsymbol{\alpha}$，β から γ のあからさまな形を求めると付録 D，式(D.8)に与えられている行列を得る．行列のかけ算を行って反交換関係式 (3.32) および式(D.1) を証明することは容易である．

Dirac 方程式

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi$$

に左から β をかけると (ψ が 4 行 1 列の行列だから 4 行 4 列の行列は左からしかかけられないことに注意)

$$\mathrm{i}\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\right)\psi=m\psi$$

付録 A，式(A.62)，(A.65) より

$$\partial^\mu=(\partial^0,\ -\nabla),\quad \partial_\mu=g_{\mu\nu}\partial^\nu=(\partial_0,\ \nabla)$$

であるから

$$\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla=\gamma^0\partial_0+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\partial}=\gamma^\mu\partial_\mu$$

$$\therefore\quad (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi\equiv(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m)\psi=0$$

これは後述の式(6.5)，(6.9) である．

(b)　Dirac 方程式

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0 \tag{1}$$

のエルミート共役（転置行列をとり各成分をその複素共役で置き換える）をとると

$$\psi^\dagger(-\mathrm{i}\overleftarrow{\partial_\mu}(\gamma^\mu)^\dagger-m)=0 \tag{2}$$

ただし記法は式(3.46) による．付録 D，式(D.8) より

$$(\gamma^0)^\dagger=\gamma_0,\quad (\gamma)^\dagger=-\gamma$$

であるから，式(2)に右から γ^0 を乗じ $(\gamma^\mu)^\dagger$ と交換してゆくと $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0=-\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ となり

$$\bar{\psi}(\mathrm{i}\overleftarrow{\partial_\mu}\gamma^\mu+m)=0$$

を得る．

(c)　前問より

$$(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0 \tag{3}$$

$$\bar{\psi}(\mathrm{i}\overleftarrow{\partial_{\mu}}\gamma^{\mu}+m)=0 \tag{4}$$

式(3) に左から $\bar{\psi}$，式(4) に右から ψ を乗じて辺々相加えれば，

$$[\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi)+(\bar{\psi}\overleftarrow{\partial_{\mu}})\gamma^{\mu}\psi]=0 \tag{5}$$

一方

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\ =(\partial_{\mu}\bar{\psi})\cdot\gamma^{\mu}\psi+\bar{\psi}\gamma^{\mu}\cdot(\partial_{\mu}\psi)$$

であるから，式(5) は $\partial_{\mu}j^{\mu}=0$ を表す．これは式(6.18) である．

3. 5　$$u^{\dagger}u=(E+m)\left(\phi^{s\dagger},\ \phi^{s\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\right)\begin{pmatrix}\phi^{s}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^{s}\end{pmatrix}$$

$$=(E+m)\phi^{s\dagger}\left(1,\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\right)\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\end{pmatrix}\phi^{s}$$

$$=(E+m)\phi^{s\dagger}\left(1+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^{2}}{(E+m)^{2}}\right)\phi^{s}$$

$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^{2}=\boldsymbol{p}^{2}$ だから

$$1+\frac{\boldsymbol{p}^{2}}{(E+m)^{2}}=1+\frac{E^{2}-m^{2}}{(E+m)^{2}}=1+\frac{E-m}{E+m}=\frac{2E}{E+m}$$

$$\therefore\quad \bar{u}u=2E(\phi^{s\dagger},\ \phi^{s})=2E\cdot 1\qquad (s=1,\ 2)$$

ϕ^{s} $(s=1,\ 2)$ は式(3.61)，(3.62) に与えられてあり $\phi^{s\dagger}$ $(s=1,\ 2)$ はその転置行列（列ベクトル）である．

v についても ϕ^{s} のかわりに式(3.74) の χ^{s} を用いて同様な計算ができる．

3. 6　KG 方程式(3.10) に置き換え $\partial^{\mu}\to\partial^{\mu}+\mathrm{i}qA^{\mu}$ を行うと

$$\begin{aligned}\Box\phi&\to(\partial_{\mu}+\mathrm{i}qA_{\mu})(\partial^{\mu}+\mathrm{i}qA^{\mu})\phi\\ &=(\partial_{\mu}+\mathrm{i}qA_{\mu})(\partial^{\mu}\phi+\mathrm{i}qA^{\mu}\phi)\\ &=\partial_{\mu}(\partial^{\mu}\phi+\mathrm{i}qA^{\mu}\phi)+\mathrm{i}qA_{\mu}(\partial^{\mu}\phi+\mathrm{i}qA^{\mu}\phi)\\ &=\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi+\mathrm{i}q[\partial_{\mu}(A^{\mu}\phi)+A_{\mu}\cdot\partial^{\mu}\phi]-q^{2}A_{\mu}A^{\mu}\phi\end{aligned} \tag{1}$$

ここで $\partial_{\mu}\partial^{\mu}=\Box$，$A_{\mu}A^{\mu}=A^{2}$ および任意のベクトル A，B について $A_{\mu}B^{\mu}=$

$g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}A^\alpha B_\beta = A^\alpha B_\alpha$ であるから式(1)は

$\Box\phi + \mathrm{i}q(\partial_\mu A^\mu + A_\mu\partial_\mu)\phi - q^2A^2\phi \equiv (\Box + \hat{V}_{\mathrm{KG}})\phi$ となる．したがって

置き換えを行ったのちの KG 方程式は

$$(\Box + m^2)\phi = -\hat{V}_{\mathrm{KG}}\cdot\phi$$

で，$\hat{V}_{\mathrm{KG}}$ は式(5.1) と一致する

《4 章》

4．1 式(4.33) を式(4.34) に代入して式(4.35) を出す．

$$\phi = \sum_r A_r(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \sum_r \dot{A}_r(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \sum_r A_r(t)\cdot\left(\frac{r\pi}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

$$\therefore\quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 = \sum_r\sum_s \dot{A}_r\dot{A}_s\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L\left[\cos\left(\frac{(r-s)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(r+s)\pi x}{L}\right)\cdot\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(r-s)\pi x}{L}\right)\cdot\frac{L}{(r-s)\pi}\right]_0^L - \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(r+s)\pi x}{L}\right)\cdot\frac{L}{(r+s)\pi}\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{2}\cdot L\cdot\delta_{rs}$$

ただし r，s は正の整数である．$r \neq s$ のとき積分は 0，$r = s$ のときは被積分関数は $\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2r\pi x}{L}\right)\right) = \frac{1}{2}$ となる．

また

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = \sum_r\sum_s A_r\cdot A_s\frac{r\pi}{L}\cdot\frac{s\pi}{L}\cdot\cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^L\left[\cos\left(\frac{(r-s)\pi x}{L}\right)+\cos\left(\frac{(r+s)\pi x}{L}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(r-s)\pi x}{L}\right)\cdot\frac{L}{(r-s)\pi}\right]_0^L+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(r+s)\pi x}{L}\right)\cdot\frac{L}{(r+s)\pi}\right]_0^L$$

$$=\frac{1}{2}\cdot L\cdot\delta_{rs}$$

したがって

$$E=\int_o^L\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_r\left[\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\frac{1}{2}\cdot L\cdot\dot{A}_r{}^2+\frac{1}{2}\cdot\rho c^2\cdot\frac{1}{2}\cdot L\cdot\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2A_r{}^2\right]$$

$$=\frac{L}{2}\sum_r\left[\frac{1}{2}\rho\dot{A}_r{}^2+\frac{1}{2}\rho\omega_r{}^2A_r{}^2\right]$$

ただし式(4.32) より $\omega_r=\dfrac{\pi c}{L}\cdot r$ とおいた.

4. 2 式(4.38) より $L(x(t),\ \dot{x}(t))=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+mgx$

式(4.37) より $S=\displaystyle\int_o^{t_0}L(x(t),\ \dot{x}(t))\mathrm{d}t$

特定の関数形 $x(t)$ を代入して積分 S を実行する.

(a) $x(t)=at,\ \dot{x}(t)=a$

$$S=\int_0^{t_0}\left(\frac{m}{2}\cdot a^2+mgat\right)\mathrm{d}t=\frac{ma}{2}[at+gt^2]_0^{t_0}$$

$$=\frac{ma}{2}\cdot t_0\cdot(a+gt_0)$$

(b) $x(t)=\dfrac{1}{2}gt^2,\ \dot{x}(t)=gt$

$$S=\int_0^{t_0}\left(\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mg^2t^2\right)\mathrm{d}t=mg^2\int_0^{t_0}t^2\mathrm{d}t=\frac{mg^2}{3}\cdot t_0{}^3$$

(c) $x(t)=bt^3,\ \dot{x}(t)=3bt^2$

$$S=\int_0^{t_0}\left(\frac{m}{2}\cdot 9b^2t^4+mgbt^3\right)\mathrm{d}t=\frac{9}{2}\cdot mb^2\cdot\frac{t_0{}^5}{5}+mgb\cdot\frac{t_0{}^4}{4}$$

軌道はすべて $t=t_0$ で同じ点 $x(t_0)$ に到達するように定数 a, b が選ばれているから

$$x(t_0)=at_0=\frac{1}{2}gt_0{}^2=bt_0{}^3$$

これから

$$a=\frac{g}{2}\cdot t_0,\quad b=\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{t_0}$$

a, b をすべて g, t_0 で表せば

(a) $S=\frac{3}{8}mg^2t_{t_0}^3=0.38mg^2t_0{}^3$

(b) $S=\frac{1}{3}mg^2t_0{}^3=0.33mg^2t_0{}^3$

(c) $S=\frac{7}{20}mg^2t_0{}^3=0.35mg^2t_0{}^3$

となり，Newton の場合がもっとも小さい S を与える．

4．3 力学変数 $\hat{A}$ に対する Heisenberg の運動方程式(4.50)

$$\dot{\hat{A}}=-\mathrm{i}[\hat{A},\ \hat{H}]$$

をハミルトニアン(4.54)

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2$$

を用いて計算する．このとき交換関係(4.48)

$$[\hat{q},\ \hat{p}]=\mathrm{i}$$

が成立する．

(a) $\hat{A}=\hat{q}$

$$\dot{\hat{q}}=-\mathrm{i}[\hat{q},\ \frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2]=\frac{-\mathrm{i}}{2m}[\hat{q},\ \hat{p}^2]$$

$$[\hat{q},\ \hat{p}^2]=\hat{q}\hat{p}^2-\hat{p}^2\hat{q}=\hat{q}\hat{p}\hat{p}-\hat{p}\hat{p}\hat{q}$$
$$=(\mathrm{i}+\hat{p}\hat{q})\hat{p}-\hat{p}(-\mathrm{i}+\hat{q}\hat{p})=2\mathrm{i}\hat{p}$$

$\therefore$ $\dot{\hat{q}}=\frac{\hat{p}}{m}$ あるいは $\hat{p}=m\dot{\hat{q}}$

(b) $\hat{A}=\hat{p}$

$$\dot{\hat{p}}=-\mathrm{i}\left[\hat{p},\ \frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2\right]=\frac{-\mathrm{i}m\omega^2}{2}[\hat{p},\ \hat{q}^2]$$

$$[\hat{p},\ \hat{q}^2]=\hat{p}\hat{q}^2-\hat{q}^2\hat{p}=\hat{p}\hat{q}\hat{q}-\hat{q}\hat{q}\hat{p}$$
$$=(-\mathrm{i}+\hat{q}\hat{p})\hat{q}-\hat{q}(\mathrm{i}+\hat{p}\hat{q})=-2\mathrm{i}\hat{q}$$
$$\therefore\quad \dot{\hat{p}}=-m\omega^2\hat{q}$$

一般に冪級数で表せるような演算子の関数について

$$[\hat{p},\ \hat{f}(\hat{q})]=-\mathrm{i}\frac{\partial\hat{f}}{\partial\hat{q}},\quad [\hat{q},\ \hat{f}(\hat{p})]=\mathrm{i}\frac{\partial\hat{f}}{\partial\hat{p}}$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示すことができる．

4．4 (a)　演算子 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ と $\hat{q}$，$\hat{p}$ の関係は式(4.57)，(4.58) に与えられている．

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{m\omega}\,\hat{q}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p})(\sqrt{m\omega}\,\hat{q}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p})$$
$$=\frac{1}{2}(m\omega\hat{q}^2-\mathrm{i}(\hat{p}\hat{q}-\hat{q}\hat{p})+\frac{1}{m\omega}\hat{p}^2$$
$$\hat{a}\hat{a}^\dagger=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{q}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{q}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(m\omega\hat{q}^2+\mathrm{i}(\hat{p}\hat{q}-\hat{q}\hat{p})-\frac{1}{m\omega}\hat{p}^2\right)$$
$$\therefore\quad \frac{\omega}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger)=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2$$

(b)　$\hat{q}$，$\hat{p}$ の間の交換関係は式(4.48) $[\hat{q},\ \hat{p}]=\mathrm{i}$ で与えられている．

$$[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{m\omega}\,\hat{q}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p},\ \sqrt{m\omega}\,\hat{q}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right]$$

交換関係は線形だから非可換量 A，B，C，D について

$$[A+B,\ C+D]=[A+B,\ C]+[A+B,\ D]$$
$$=[A,\ C]+[B,\ C]+[A,\ D]+[B,\ D]$$

が成り立つ．したがって

$$[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger]=\frac{\mathrm{i}}{2}([\hat{p},\ \hat{q}]-[\hat{q},\ \hat{p}])=\frac{\mathrm{i}}{2}(-\mathrm{i}-\mathrm{i})=1$$

である．また

$$[\hat{H},\ \hat{a}]=[\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2},\ \hat{a}]\omega=[\hat{a}^\dagger\hat{a},\ \hat{a}]\omega$$

となるが，交換関係の代数として

$$[AB,\ C]=ABC-CAB=A(BC-CB)+(AC-CA)B$$
$$=A[B,\ C]+[A,\ C]B$$

が成り立つから

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a},\ \hat{a}]=\hat{a}^\dagger[\hat{a},\ \hat{a}]+[\hat{a}^\dagger,\ \hat{a}]\hat{a}=-\hat{a}$$
$$\therefore\ \ [\hat{H},\ \hat{a}]=-\omega\hat{a}$$

である．同様に

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a},\ \hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger]+[\hat{a}^\dagger,\ \hat{a}^\dagger]\hat{a}=\hat{a}^\dagger$$

より

$$[H,\ \hat{a}^\dagger]=\omega\hat{a}^\dagger$$

である．

(c)　状態 $|n\rangle$ が真空 $|0\rangle$ より $(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ によって作り出されること，および $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ が粒子数の演算子であること（式(4.69) 参照）から出発しよう．

状態 $|n\rangle$ の規格化定数を N_n とすれば，規格化された状態 $|n\rangle$ は

$$|n\rangle=N_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

である．同様に規格化された状態 $|n+1\rangle$ は

$$|n+1\rangle=N_{n+1}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|0\rangle=\frac{N_{n+1}}{N_n}\hat{a}^\dagger|n\rangle$$

で表されるから

$$\langle n+1|n+1\rangle=\left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right)^2\ \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle$$
$$=\left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right)^2\ \langle n|1+\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\ =\left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right)\cdot(n+1)=1$$

したがって漸化式

$$N_{n+1}=N_n\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

が得られ，これから

$$N_{n+1}=\frac{N_n}{\sqrt{n+1}}=\frac{N_{n-1}}{\sqrt{(n+1)n}}=\cdots\cdots=\frac{N_0}{\sqrt{(n+1)!}}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}$$

が帰結される．

(d)　ある状態 $|n\rangle$ に対して，状態 $a^\dagger|n\rangle$ は粒子がさらに1個励起された状態である．いま演算子

$$\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$$

の個有値を n とするとき

$$\hat{n}|n\rangle=\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle=n|n\rangle$$

である．同じ演算子を状態 $a^\dagger|n\rangle$ に作用させると

$$\begin{aligned}\hat{n}(\hat{a}^\dagger|n\rangle)&\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle\\&=\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|n\rangle=\hat{a}^\dagger(n+1)|n\rangle\\&=(n+1)(\hat{a}^\dagger|n\rangle)\end{aligned}$$

すなわち $a^\dagger|n\rangle$ も $\hat{n}$ の固有状態でその固有値は $(n+1)$ である．したがって $\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ を状態の粒子数を指定する演算子とみなすことができる．

4．5 ラグランジアン

$$\mathscr{L}=\mathrm{i}\psi^*\dot{\psi}-\frac{1}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi$$

の Euler-Lagrange 方程式は ψ^* の変分について式(4.82)

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*}-\nabla\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\psi^*)}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*}\right)=0$$

で与えられ

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*}=\mathrm{i}\dot{\psi},\quad\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\psi^*)}=-\frac{1}{2m}\nabla\psi,\quad\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*}=0$$

より

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\psi=0$$

となる．

また ψ について変分をとれば Euler-Lagrange 方程式(4.82) は

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}=0,\quad\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\psi)}=-\frac{1}{2m}\nabla\psi^*,\quad\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\psi^*$$

より

$$\frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*-\mathrm{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=0$$

となる．

4．6 式(4.103)および式(4.102)で $a(k)$，$a^*(k)$ を演算子 $\hat{a}(k)$，$\hat{a}^\dagger(k)$ に置き換えたものを，式(4.95) の左辺に代入し，交換関係(4.104) を用いて右辺が得られることを示す．

$$[\hat{\phi}(x,\ t),\ \hat{\pi}(y,\ t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\omega')\mathrm{d}k'}{2\pi\cdot 2\omega'}$$
$$[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\hat{a}^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\ \hat{a}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y}-\hat{a}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y}]$$

ただし $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ の略記である．時刻 t は同一だからこう略記しても誤らない．交換関係

$$[A+B,\ C+D]=[A,\ C]+[B,\ C]+[A,\ D]+[B,\ D]$$

により

$$[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ \hat{a}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]=0$$
$$[\hat{a}^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\ \hat{a}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]=[\hat{a}^{\dagger}(k),\ \hat{a}(k')]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx+k'y)}$$
$$=-2\pi 2\omega\cdot\delta(k-k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-kx+k'y)}$$
$$[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ -\hat{a}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y}]=-[\hat{a}(k),\ \hat{a}^{\dagger}(k')]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+k'y)}$$
$$=-2\pi\cdot 2\omega\delta(k-k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-k'y)}$$
$$[\hat{a}^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\ -\hat{a}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y}]=0$$
$$\therefore\quad [\hat{\phi}(x,\ t),\ \hat{\pi}(y,\ t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(+\mathrm{i}\omega')\mathrm{d}k'$$
$$\times\{\delta(k-k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx+k'y)}+\delta(k-k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-k'y)}\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}\cdot(+\mathrm{i}\omega)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)})$$

第 1 の積分で $k\to -k$ と置き換えると式(4.95)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mathrm{i}\omega}{2\pi\cdot 2\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\mathrm{d}k=\mathrm{i}\delta(x-y)$$

となる．

4. 7 平面波の解は式(4.103)，(4.102) より

$$\hat{\phi}(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\hat{a}^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}]$$
$$\hat{\pi}(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\omega)\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}-\hat{a}^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}]$$

式(4.98) の中の各項を計算する．

$$\int \hat{\pi}^2 \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}\omega)\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}\omega')\mathrm{d}k'}{2\pi\cdot 2\omega'} \times$$
$$(\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} - \hat{a}^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)})(\hat{a}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'x-\omega' t)} - \hat{a}^\dagger(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k'x-\omega' t)})$$

かっこの中をまとめると

$$\hat{a}(k)\hat{a}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega')t}$$
$$-\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}$$
$$-\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')t}$$
$$\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}$$

の形になる．$\int \mathrm{d}x$ を行うと $2\pi\delta(k+k')$ あるいは $2\pi\delta(k-k')$ になるが，注記のとおり $\omega=|k|$ なので $k=\pm k'$ のどちらの場合でも $\omega=\omega'$ である．$\mathrm{d}k'$ 積分を行い

$$\therefore \quad \int \hat{\pi}^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}\omega)\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega} \cdot \frac{-\mathrm{i}}{2} \times$$
$$\{\hat{a}(k)\hat{a}(-k)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} - \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) - \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)$$
$$+\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(-k)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}\} \tag{1}$$

同様な計算を繰り返すと

$$\int \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}k)}{2\pi\cdot 2\omega}\mathrm{d}k \cdot \frac{-\mathrm{i}}{2} \times$$
$$\{-\hat{a}(k)\hat{a}(-k)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} - \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) - \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)$$
$$-\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(-k)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}\} \tag{2}$$

が得られる．このとき，$\int \mathrm{d}x$ を行うと再び $k'=\pm k$ になるが，第 1 項と第 4 項の負号は $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}k')}{2\pi\cdot 2\omega'}\mathrm{d}k'$ の分子の因子として直接きいてくるからである．$\omega=|k|$ より式(1)，(2) から

$$\frac{1}{2}\int \left[\hat{\pi}^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\cdot 2\omega} \cdot \frac{\omega}{2}\{a^\dagger(k)\hat{a}(k) + a(k)a^\dagger(k)\}$$

である．

4．8　場の量 ϕ_1，ϕ_2 に関するハミルトニアン (4.136)

$$\hat{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_1 - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_2 - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}_2^2$$

が，場の量の変換 (4.137)

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1'=(\cos\alpha)\hat{\phi}_1-(\sin\alpha)\hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_2'=(\sin\alpha)\hat{\phi}_1+(\cos\alpha)\hat{\phi}_2 \end{cases}$$

によって変わらないこと，すなわち式(4.138) を示す．

場 $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ は独立だから交換可能である．

$$\partial_\mu\hat{\phi}_1'\partial^\mu\hat{\phi}_1'=(\cos\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_1-\sin\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_2)(\cos\alpha\cdot\partial^\mu\hat{\phi}_1-\sin\alpha\cdot\partial^\mu\hat{\phi}_2)$$
$$=\cos^2\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_1-\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_2+\partial_\mu\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_1)$$
$$+\sin^2\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_2$$

$$\hat{\phi}_1'^2=(\cos\alpha\cdot\hat{\phi}_1-\sin\alpha\cdot\hat{\phi}_2)(\cos\alpha\cdot\hat{\phi}_1-\sin\alpha\cdot\hat{\phi}_2)$$
$$=\cos^2\alpha\cdot\hat{\phi}_1^2-\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\hat{\phi}_1\cdot\hat{\phi}_2+\hat{\phi}_2\cdot\phi_1)+\sin^2\alpha\cdot\hat{\phi}_2^2$$

$$\partial_\mu\hat{\phi}_2'\partial^\mu\hat{\phi}_2'=(\sin\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_1+\cos\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_2)(\sin\alpha\cdot\partial^\mu\hat{\phi}_1+\cos\alpha\cdot\partial^\mu\hat{\phi}_2)$$
$$=\sin^2\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_1+\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_2+\partial_\mu\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_1)$$
$$+\cos^2\alpha\cdot\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_2$$

$$\hat{\phi}_2'^2=(\sin\alpha\cdot\hat{\phi}_1+\cos\alpha\cdot\hat{\phi}_2)(\sin\alpha\cdot\hat{\phi}_1+\cos\alpha\cdot\hat{\phi}_2)$$
$$=\sin^2\alpha\cdot\hat{\phi}_1^2+\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2+\hat{\phi}_2\hat{\phi}_1)+\cos^2\alpha\cdot\hat{\phi}_2^2$$

$$\therefore\quad 2\mathscr{L}'(\hat{\phi}_1'\hat{\phi}_2')=\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_1+\partial_\mu\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_2+m^2(\hat{\phi}_1^2+\hat{\phi}_2^2)$$
$$=2\mathscr{L}(\hat{\phi}_1,\ \hat{\phi}_2)$$

4．9 (a) 式(4.158)

$$\hat{N}^\mu=\mathrm{i}(\hat{\phi}^\dagger\partial^\mu\hat{\phi}-\hat{\phi}\partial^\mu\hat{\phi}^\dagger)$$

で与えられるカレント演算子に対して，式(4.149)

$$\hat{N}=\int\hat{N}^0\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

で定義される演算子が式(4.159)で与えられることを示す．ただし，場の量は式(4.151)

$$\hat{\phi}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+\hat{b}^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]$$

のように展開される．ここで $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})}$ である．

まず

$$\hat{N}^0=\mathrm{i}(\hat{\phi}^\dagger\partial^0\hat{\phi}-\hat{\phi}\partial^0\hat{\phi}^\dagger)$$

の第 1 項を算出する．

$$\hat{\phi}^{\dagger}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3\cdot 2\omega}[\hat{a}^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\hat{b}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}]$$

$$\partial^0\hat{\phi}=\int\frac{(-\mathrm{i}\omega')\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3\cdot 2\omega'}[\hat{a}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}-\hat{b}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}]$$

$$\hat{\phi}^{\dagger}\partial^0\hat{\phi}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3\cdot 2\omega}\int\frac{(-\mathrm{i}\omega')\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3\cdot 2\omega'}\times$$
$$\{\hat{a}^{\dagger}(k)\hat{a}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}+\hat{b}(k)\hat{a}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x}$$
$$-\hat{a}^{\dagger}(k)\hat{b}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}-\hat{b}(k)\hat{b}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')x}\}$$

ここで $\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ を行うと $\boldsymbol{k}=\pm\boldsymbol{k}'$ を与えるデルタ関数が現れるが，$\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$ なので $\omega=\omega'$ である．

$$\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

$$\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')$$

より

$$\int\hat{\phi}^{\dagger}\partial^0\hat{\phi}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\Big\{\int\frac{-\mathrm{i}}{2}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'[\hat{a}^{\dagger}(k)\hat{a}(k')$$
$$-\hat{b}(k)\hat{b}^{\dagger}(k')]$$
$$+\int\frac{-\mathrm{i}}{2}\cdot\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'[\hat{b}(k)\hat{a}(k')-\hat{a}^{\dagger}(k)\hat{b}^{\dagger}(k')]\Big\}$$
$$=\frac{-\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}^{\dagger}(k)\hat{a}(k)-\hat{b}(k)\hat{b}^{\dagger}(k)+\hat{b}(k)\hat{a}(-k)$$
$$-\hat{a}^{\dagger}(k)\hat{b}^{\dagger}(-k)] \tag{1}$$

まったく同様に

$$\phi=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+\hat{b}^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]$$

$$\partial^0\hat{\phi}^{\dagger}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'(\mathrm{i}\omega')}{(2\pi)^3 2\omega'}[\hat{a}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}-\hat{b}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}]$$

$$\therefore\quad\hat{\phi}\partial^0\hat{\phi}^{\dagger}=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\int\frac{(\mathrm{i}\omega')\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3 2\omega'}$$
$$\times[\hat{a}(k)\hat{a}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')x}+\hat{b}^{\dagger}(k)\hat{a}^{\dagger}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}$$
$$-\hat{a}(k)\hat{b}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x}-\hat{b}^{\dagger}(k)\hat{b}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}]$$

空間積分 $\int d^3\boldsymbol{x}$ を行うと

$$\int \hat{\phi}\partial^2\hat{\phi}^\dagger d^3\boldsymbol{x} = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\left\{\int \frac{i}{2}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')d^3\boldsymbol{k}[\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k') - \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k')] + \int \frac{i}{2}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')d^3\boldsymbol{k}'[\hat{b}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k') - \hat{a}(k)\hat{b}(k')]\right\}$$

$$= \frac{i}{2}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k) - \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k) + \hat{b}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(-k) - \hat{a}(k)\hat{b}(-k)] \tag{2}$$

したがって式(1), (2)を組み合わせて

$$\hat{N} = i\int(\hat{\phi}^\dagger\partial^0\hat{\phi} - \hat{\phi}\partial^0\hat{\phi}^\dagger)d^3\boldsymbol{x}$$

$$= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\cdot\frac{1}{2}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) - \hat{b}(k)\hat{b}^\dagger(k) + \hat{b}(k)\hat{a}(-k) - \hat{a}^\dagger(k)\hat{b}^\dagger(-k) + \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k) - \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k) + \hat{b}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(-k) - \hat{a}(k)\hat{b}(-k)]$$

交換関係(4.153)より

$$\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) + \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k) = 2\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) + (2\pi)^3 2\omega\delta(0)$$
$$\hat{b}(k)\hat{b}^\dagger(k) + \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k) = 2\hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k) + (2\pi)^3\cdot 2\omega\delta(0)$$

a 場と b 場の混合した形は，$\int d^3\boldsymbol{k}$ を行うとき $\boldsymbol{k}\to-\boldsymbol{k}$ と変数変換を行えば打ち消してしまう．

$$\therefore\quad \hat{N} = \int N^0 d^3\boldsymbol{x} = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) - \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k)]$$

次に式(4.159)の

$$\hat{N} = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) - \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k)]$$

と式(4.156)の

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega}[\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) + \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k)]\,\omega$$

の間の交換関係であるが，これは a 場と b 場が独立（交換可能）であることに注意すればほとんど自明である．交換子

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hat{b}^\dagger\hat{b},\ \hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{b}^\dagger\hat{b}]$$

は複合演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}=\hat{n}_a$, $\hat{b}^\dagger\hat{b}=\hat{n}_b$ の間の交換関係として

$$\begin{aligned}[\hat{n}_a-\hat{n}_b,\ \hat{n}_a+\hat{n}_b]&=-[\hat{n}_b,\ \hat{n}_a]+[\hat{n}_a,\ \hat{n}_b]\\&=2[\hat{n}_a,\ \hat{n}_b]=0\end{aligned}$$

となる．

(b)　式(4.162) は，パラメーター α が無限小のときは容易に証明できる．α の 1 次までの近似で

$$\hat{U}(\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{N}}=1+\mathrm{i}\alpha\hat{N}$$

$$U^{-1}(\alpha)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{N}}=1-\mathrm{i}\alpha\hat{N}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad U(\alpha)\hat{\phi}U^{-1}(\alpha)&=(1+\mathrm{i}\alpha\hat{N})\hat{\phi}(1-\mathrm{i}\alpha\hat{N})\\&=\hat{\phi}+\mathrm{i}\alpha(\hat{N}\hat{\phi}-\hat{\phi}\hat{N})=\hat{\phi}-\mathrm{i}\alpha\hat{\phi}\\&=(1-\mathrm{i}\alpha)\hat{\phi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{\phi}\end{aligned}$$

である．

一般に A と F が非可換量であれば

$$\mathrm{e}^{-A}F\mathrm{e}^{A}=F+\frac{1}{1!}[F,\ A]+\frac{1}{2!}[[F,\ A],\ A]+\frac{1}{3!}[[[F,\ A],\ A],\ A]+\cdots\cdots \tag{3}$$

が成り立つ．ここで

$$A=-\mathrm{i}\alpha\hat{N},\quad F=\hat{\phi}$$

ととれば

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{N}}\hat{\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{N}}&=\hat{\phi}+\frac{1}{1!}[\hat{\phi},-\mathrm{i}\alpha\hat{N}]+\frac{1}{2\,!}[[\phi,\ \Box-\mathrm{i}\alpha\hat{N}],\ \Box-\mathrm{i}\alpha\hat{N}]\\&\quad+\frac{1}{3!}[[[\phi,-\mathrm{i}\alpha\hat{N}],\ -\mathrm{i}\alpha\hat{N}],\ -\mathrm{i}\alpha\hat{N}]+\cdots\cdots\\&=\hat{\phi}+\frac{(-\mathrm{i}\alpha)}{1!}\hat{\phi}+\frac{(-\mathrm{i}\alpha)^2}{2!}\hat{\phi}+\frac{(-\mathrm{i}\alpha)^3}{3!}\hat{\phi}+\cdots\cdots\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{\phi}\end{aligned}$$

である．

式(3)，$\mathrm{e}^{-A}F\mathrm{e}^{A}$ の展開公式は次のようにして導ける．実パラメーター s を含む量

$$F(s)=\mathrm{e}^{-sA}F\mathrm{e}^{sA}$$

を考え，これを s で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=-A\cdot\mathrm{e}^{-sA}F\mathrm{e}^{sA}+\mathrm{e}^{-sA}F\mathrm{e}^{sA}\cdot A$$

$$=[F(s),\ A]$$

となるから微分は A との交換子に等しい．したがって

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}\right)=[[F(s),\ A],\ A]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}s^3}=[[F(s),\ A],\ A]$$

のように遂次微係数を多重交換子で表すことができる．$F(s)$ を $s=0$ のまわりに Taylor 展開して $s=1$ のときの値を求めれば

$$F(1)=\mathrm{e}^{-A}F\mathrm{e}^{A}$$

$$=F(0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}\right)_0+\frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}s^2}\right)_0+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}s^3}\right)_0+\cdots\cdots$$

$$=F=\frac{1}{1!}[F,A]+\frac{1}{2!}[[F,A],A]+\frac{1}{3!}[[[F,A],A],A]+\cdots\cdots$$

が得られる．

4．10 $\mathscr{L}_0=\mathrm{i}\psi^\dagger\dot{\psi}+\mathrm{i}\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi-m\psi^\dagger\beta\psi$

$$=\psi^\dagger(\mathrm{i}\dot{\psi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi-m\beta\psi)$$

$\psi^\dagger$ について変分を取るときの Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^\dagger}=\mathrm{i}\dot{\psi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi-m\beta\psi$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\psi^\dagger)}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\dot{\psi}^\dagger)}=0$$

より

$$\mathrm{i}\dot{\psi}=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi$$

となり Dirac 方程式(3.26) に一致する．

4．11

$$\begin{cases}\hat{\mathscr{L}}=-\dfrac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}-j^{\mu}_{em}\hat{A}_\mu\\ \hat{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\hat{A}_\nu-\partial_\nu\hat{A}_\mu\end{cases}$$

ラグランジアンの第 1 項を書き直して

$$\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}=\hat{F}_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$
$$=\hat{F}_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu-\hat{F}_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu$$

第 2 項で動標 ν，μ を入れ替えると，$\hat{F}_{\mu\nu}$ の反対称性より

$$\hat{F}_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu\to\hat{F}_{\nu\mu}\partial^\mu A^\nu=-\hat{F}_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu$$
$$\therefore\quad \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}=2\hat{F}_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu=2(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\cdot\partial^\mu A^\nu$$

したがって

$$\hat{\mathscr{L}}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\hat{A}_\nu-\partial_\nu\hat{A}_\mu)\cdot\partial^\mu\hat{A}^\nu-\hat{j}^{\mu}_{em}\hat{A}_\mu$$

と書くことができる．

A_μ の 4 つの成分を独立として Euler-Lagrange 方程式(4.190)

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\nu\hat{A}_\mu)}\right)-\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{A}_\mu}=0$$

を求める．このとき $\partial_\nu\hat{A}_\mu$ 項は μ を指定しても動標を含む $\partial^\mu A^\nu$ 項の中にもあることを注意しなくてはならない．そのとき $\mathscr{L}$ の第 1 項は

$$((\partial_\mu\hat{A}_\nu-\partial_\nu\hat{A}_\mu)\partial^\mu\hat{A}^\nu)=(\partial_\mu\hat{A}_\nu-\partial_\nu\hat{A}_\mu)g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\partial_\alpha\hat{A}_\beta$$
$$=(\partial^\alpha\hat{A}^\beta-\partial^\beta\hat{A}^\alpha)\partial_\alpha\hat{A}_\beta$$
$$=(\partial^\mu\hat{A}^\nu-\partial^\nu\hat{A}^\mu)\partial_\mu A_\nu \qquad \text{(動標のつけかえ)}$$

と考えればよい．

$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\nu\hat{A}_\mu)}=-\frac{1}{2}(\partial^\nu\hat{A}^\mu-\partial^\mu\hat{A}^\nu)-\frac{1}{2}(\partial^\nu\hat{A}^\mu-\partial^\mu\hat{A}^\nu)$$
$$=\partial^\mu\hat{A}^\nu-\partial^\nu\hat{A}^\mu$$
$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{A}_\mu}=-\hat{j}^{\mu}_{em}$$

より

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\nu\hat{A}_\mu)}\right)-\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{A}_\mu}=\partial_\nu(\partial^\mu\hat{A}^\nu-\partial^\nu\hat{A}^\mu)+\hat{j}^{\mu}_{em}=0$$

すなわち $\partial_\nu(\partial^\nu\hat{A}^\mu)=\Box\hat{A}^\mu$ と書いて

$$\Box\hat{A}^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu\hat{A}^\nu)=\hat{j}^{\mu}_{em}$$

が得られる．

《5 章》

5．1　時間変数に関する部分積分を行うため

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\cdot x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\cdot x^0-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\mathrm{f}\cdot \boldsymbol{x}},\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{i}\cdot x}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{i}0}\cdot x^0+\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\mathrm{i}\cdot \boldsymbol{x}}$$

と書けば

$$\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\cdot x}\partial_0 A^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\cdot x}=\int \mathrm{d}x^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\cdot x^0}\frac{\partial}{\partial x^0}(A^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\cdot x^0})\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\mathrm{f}\cdot \boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\mathrm{i}\cdot \boldsymbol{x}}$$

であるから

$$\int \mathrm{d}x^0\cdots\cdots=\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\cdot x^0}\cdot A^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\cdot x^0}\Big|_{x_0=-\infty}^{x_0=+\infty}-\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\int \mathrm{d}x^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0}\cdot x^0}A^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_{\mathrm{i}0}\cdot x^0}$$

仮説により第 1 項は 0 である．したがって

$$\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\cdot x}\partial_0 A^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{i}x}=(-\mathrm{i}p_{\mathrm{f}0})\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\mathrm{i}x}A^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{i}\cdot x}$$

が成り立つ．空間変数に関する境界条件は，$\boldsymbol{x}$の<u>各成分</u>が ∞ に近づくとき，$\boldsymbol{A}$ の<u>各成分</u>が 0 に収束すると理解すべきである．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x^1}A^1+\frac{\partial}{\partial x^2}A^2+\frac{\partial}{\partial x^3}A^3$$

であるから，空間積分は 3 つの項に分かれるが，第 1 の項については x^1 で部分積分し，第 2，第 3 の項についてはそれぞれ x^2，x^3 で部分積分して時間変数とまったく平行な取り扱いをすれば

$$\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\cdot x}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{i}\cdot x}=(+\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\mathrm{f})\cdot\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\cdot x}\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{i}\cdot x}$$

を得る．$\boldsymbol{p}_\mathrm{f}\cdot\boldsymbol{A}=p_{\mathrm{f}1}\cdot A^1+p_{\mathrm{f}2}\cdot A^2+p_{\mathrm{f}3}\cdot A^3$ に注意．

時空間の積分

$$\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\cdot x}(\partial_\mu A^\mu+A^\mu\partial_\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{i}\cdot x}$$

の第 1 項は上述の部分積分によって因子 $-\mathrm{i}p_{\mathrm{f}\mu}$ を得，第 2 項は直接微分を行って因子 $-\mathrm{i}p_{\mathrm{i}\mu}$ を得るから，上の積分は

$$-\mathrm{i}(p_\mathrm{f}+p_\mathrm{i})_\mu\cdot\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\mathrm{f}\cdot x}A^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mathrm{i}\cdot x}$$

5．2　式(5.44)から出発して式(5.59)に至る道すじは，式(5.48)に続く本文の中に詳しく説明されている．式(5.37)，(5.38)より

$$\hat{j}^{\mu}_{em}=\mathrm{i}e(\hat{\phi}^{\dagger}\partial^{\mu}\hat{\phi}-(\partial^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger})\hat{\phi})$$

$$\hat{\phi}(x)=\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\cdot 2E}[\hat{a}(p)e^{-\mathrm{i}px}+\hat{b}^{\dagger}(p)e^{\mathrm{i}px}]$$

$$\hat{\phi}^{\dagger}(x)=\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\cdot 2E}[\hat{a}^{\dagger}(p)e^{\mathrm{i}px}+\hat{b}(p)e^{-\mathrm{i}px}]$$

であるから，$\hat{j}^{\mu}_{em}$ 中の各項の 2 重 Fourier 分解を書き下すことは容易である．

$$\partial^{\mu}\hat{\phi}=\int\frac{d^3\boldsymbol{p}'(-\mathrm{i}p'_{\mu})}{(2\pi)^3 2E'}[\hat{a}(p')e^{-\mathrm{i}p'x}-\hat{b}^{\dagger}(p')e^{\mathrm{i}px}]$$

$$\therefore\quad \hat{\phi}^{\dagger}(\partial^{\mu}\hat{\phi})=\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\cdot 2E}\int\frac{(-\mathrm{i}p'\mu)d^3\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3\cdot 2E'}\times$$

$$[\hat{a}^{\dagger}(p)e^{\mathrm{i}px}+\hat{b}(p)e^{-\mathrm{i}px}][\hat{a}(p')e^{-\mathrm{i}p'x}-\hat{b}^{\dagger}(p')e^{\mathrm{i}p'x}] \qquad (1)$$

演算子 $\hat{a}^{\dagger}(p)$, $\hat{b}^{\dagger}(p)$ には $e^{\mathrm{i}px}$, $\hat{a}(p)$, $\hat{b}(p)$ には $e^{-\mathrm{i}px}$ がいつもついているから，$e^{\pm \mathrm{i}px}$ はあからさまに書かないことにする．式(1)の演算子部分は

$$(\hat{a}^{\dagger}(p)+\hat{b}(p))(\hat{a}(p')-\hat{b}^{\dagger}(p'))$$
$$=\hat{a}^{\dagger}(p)\hat{a}(p')+\hat{b}(p)\hat{a}(p')-\hat{a}^{\dagger}(p)\hat{b}^{\dagger}(p')-\hat{b}(p)\hat{b}^{\dagger}(p') \qquad (2)$$

である．式(5.44)の（前半の）演算子部分は式(2)の中の

$$\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{a}^{\dagger}(p)\hat{a}(p')\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle$$

のような部分からなる．Wick の定理(5.58)により

$$\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{a}^{\dagger}(p)\hat{a}(p')\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle=\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{a}^{\dagger}(p)|0\rangle\langle 0|\hat{a}(p')\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle$$
$$+\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{a}(p')|0\rangle\langle 0|\hat{a}^{\dagger}(p)\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle$$
$$+\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle\langle 0|\hat{a}^{\dagger}(p)\hat{a}(p')|0\rangle \qquad (3)$$

が得られるが式(5.49)の関係により第 1 項しか 0 でない．式(5.51)より式(2)は

$$\langle 0|\cdots\cdots\cdots|0\rangle=(2\pi)^6\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_i)\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_f)\cdot 2E_i\cdot 2E_f\cdot e^{\mathrm{i}(p_f-p_i)\cdot x}$$

である．a 場と b 場は独立であるから，b 場をひとつ含む式 (2) の中の第 2, 第 3 項は真空期待値に寄与しない．

$$\hat{b}(p)|0\rangle=0,\quad \langle 0|\hat{b}^{\dagger}(p')=0$$

式(2)の第 4 項は

$$\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{b}(p)\hat{b}^{\dagger}(p')\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle$$
$$=\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{b}(p)|0\rangle\langle 0|\hat{b}^{\dagger}(p')\hat{a}(p_i)|0\rangle$$
$$+\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{b}^{\dagger}(p)|0\rangle\langle 0|\hat{b}(p)\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle$$
$$+\langle 0|\hat{a}(p_f)\hat{a}^{\dagger}(p_i)|0\rangle\langle 0|b(p)\hat{b}^{\dagger}(p')|0\rangle$$

となるが，$p_i \neq p_f$ であればこれも 0 である．したがって

$$\langle p_f | ie\hat{\phi}^\dagger(\partial^\mu \phi) | p_i \rangle = ep_f^\mu e^{i(p_f - p_i)\cdot x} \tag{4}$$

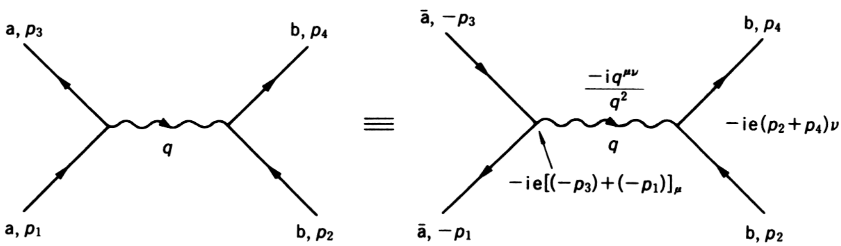
となり，平面波の規格化常数をもとの $\phi(x)$ の中に補えば式 (4) に $N_f N_i$ を乗ずることになる．

$\hat{j}^\mu_{em}$ の第 2 項も同様に計算できて，$\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger$ の Fourier 分解を $\int \cdots\cdots d^3\boldsymbol{p}'$ とすれば式(2) の中で $p \rightleftarrows p'$ と入れ換えるだけであることがわかる．したがって

$$\langle p_f | \hat{j}^\mu_{em}(x) | p_i \rangle = eN_i N_f (p_i + p_f)^\mu e^{-i(p_i - p_f)\cdot x}$$

である．

5. 3 本文の 3.4 節に ab 散乱が論じられている．3.4 節の論述に従って āb 散乱を ab 散乱にひきなおせば，図 5.8 に対応する Feynman 図形とその要素は以下の図 3 のごとくである．



各頂点における 4 元運動量の保存は

$$(-p_3) = q + (-p_1), \quad q + p_2 = p_4$$

あるいは

$$q = p_4 - p_2 = p_1 - p_3$$

である．したがって行列要素は式(5.70) にならって

$$\mathscr{A} = -i\int j^\mu_{a'a}(x) q^{-2} j_{\mu b'b}(x) d^4x$$

$$= -i\int N_1 N_3 (-ie_a)[(-p_3)+(-p_1)]_\mu e^{i((-p_1)-(-p_3))\cdot x}\cdot(-ig^{\mu\nu}q^{-2})$$

$$\times N_2 N_4 \cdot (-ie_b)(p_2 + p_4)_\nu e^{i(p_4 - p_2)x} d^4x$$

$$= -\mathrm{i}e_a e_b N_1 N_2 N_3 N_4 (p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)^\mu \cdot q^{-2}$$
$$\times \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_3 - p_1)x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_4 - p_2)x} \mathrm{d}^4 x$$
$$= -\mathrm{i}e_a e_b N_1 N_2 N_3 N_4 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(-p_1 - p_2 + p_3 + p_4)$$
$$\times (p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)^\mu \cdot q^{-2}$$

この結果は ab 散乱の行列要素(5.72)と符号が異なるのみである．符号の違いは $\bar{a}$ と a の電荷の違いに対応する．運動量はいずれも $\bar{a}$ の物理的な（粒子としての）運動量である．

5. 4 (a) 重心系を考えると式(5.94)，(5.95) より

$$p_1 = (E_1,\ \boldsymbol{p}),\quad p_2 = (E_2,\ -\boldsymbol{p}),\quad p_3 = (E_1,\ \boldsymbol{p}'),\quad p_4 = (E_2,\ -\boldsymbol{p}')$$

である．これから

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1{}^2 m_2{}^2 = (E_1 E_2 + \boldsymbol{p}^2)^2 - (E_1{}^2 - \boldsymbol{p}^2)(E_2{}^2 - \boldsymbol{p}^2) = \boldsymbol{p}^2 (E_1 + E_2)^2$$

を得るから

$$[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1{}^2 m_2{}^2]^{1/2} = |\boldsymbol{p}| \cdot (E_1 + E_2) \tag{1}$$

一方重心系における相対速度の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ は

$$|\boldsymbol{v}| = \frac{|\boldsymbol{p}|}{E_1} + \frac{|\boldsymbol{p}|}{E_2} = \frac{|\boldsymbol{p}|}{E_1 \cdot E_2} \cdot (E_1 + E_2)$$

である．これは相対論の運動量とエネルギーの式（m_0 は静止質量）

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},\quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},\quad \beta = \frac{v}{c}$$

で，$c = 1$ とおけば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\boldsymbol{E}$ を得るからである．したがって

$$E_1 E_2 |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{p}| \cdot (E_1 + E_2) \tag{2}$$

となり，式(1)と(2)の左辺は等しい．

実験室系においては

$$p_1 = (E_1,\ \boldsymbol{p}_1),\quad p_2 = (m_2,\ 0),\quad p_3 = (E_1,\ \boldsymbol{p}_3),\quad p_4 = (E_2,\ \boldsymbol{p}_4)$$

である．これから

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1{}^2 m_2{}^2 = (E_1 m_2)^2 - m_1{}^2 m_2{}^2 = m_2{}^2 (E_1{}^2 - m_1{}^2) = m_2{}^2 \boldsymbol{p}_1{}^2$$

すなわち

$$[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1{}^2 m_2{}^2]^{1/2} = m_2 \cdot |\boldsymbol{p}_1|$$

である．またこの座標系では明らかに $E_2 = m_2$, $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{p}_1|/E_1$ であるから，$E_1 E_2 \times |\boldsymbol{v}| = m_2 |\boldsymbol{p}_1|$ となって上の表式に等しい．

(b)

$$s=(p_1+p_2)^2=p_1{}^2+2(p_1\cdot p_2)+p_2{}^2=(m_1{}^2+m_2{}^2)+2(p_1\cdot p_2)$$

$$\therefore \quad (p_1\cdot p_2)=\frac{1}{2}(s-m_1{}^2-m_2{}^2)$$

$$\begin{aligned}4[(p_1\cdot p_2)^2-m_1{}^2m_2{}^2]&=(s-m_1{}^2-m_2{}^2)^2-4m_1{}^2m_2{}^2\\&=[(s-m_1{}^2-m_2{}^2)-2m_1m_2][(s-m_1{}^2-m_2{}^2)\\&\quad+2m_1m_2]\\&=[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]\end{aligned}$$

(c) 問題 5.3 より摂動の最低次では $\bar{\text{a}}\text{b}$ 散乱と ab 散乱の断面積は相等しい．したがって本文の式(5.115) を用い，$|F|^2$ を式(5.123) から計算すればよい．また $e_\text{a}=e_\text{b}=e$ とおく．

重心系においては式(5.94)，(5.95) より

$$p_1=(E_1,\ \boldsymbol{p}),\ \ p_2=(E_2,\ -\boldsymbol{p}),\ \ p^3=(E_1,\ \boldsymbol{p}'),\ \ p_4=(E_2,\ -\boldsymbol{p}')$$

および

$$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|=p,\ (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')=p^2\cos\theta \quad (\theta=\theta_\text{CM})$$

であるから

$$\begin{aligned}&(p_1+p_3)\cdot(p_2+p_4)=(p_1\cdot p_2)+(p_1\cdot p_4)+(p_3\cdot p_2)+(p_3\cdot p_4)\\&=(E_1E_2+p^2)+(E_1E_2+p^2\cos\theta)+(E_1E_2+p^2\cos\theta)+(E_1E_2+p^2)\\&=4\left(E_1E_2+p^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\\&q^2=(p_1-p_3)^2=(0,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2=-(p^2-2p^2\cos\theta+p^2)\\&\quad=-4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

式(5.123) より

$$|F|^2=e^4\cdot\frac{\left(E_1E_2+p^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{p^4\sin^4\dfrac{\theta}{2}}=e^4\cdot\frac{E_1{}^2E_2{}^2}{p^4}\frac{\left(1+\dfrac{p^2}{E_1E_2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}$$

これを式(5.115) に代入すると $W=E_1+E_2$ だから

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_\text{CM}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\cdot\left[\frac{E_1E_2}{2p^2(E_1+E_2)}\right]^2\cdot\frac{\left(1+\dfrac{p^2}{E_1E_2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}$$

分母の $\sin^4(\theta/2)$ は q^2，すなわち 2 粒子間の電気力に由来し Rutherford 散乱の類似の項と同じ性格を持つ．第 2 の因子は自然単位系で面積の次元を持つ．角分布は式(5.119) より，“量”の間の変換として符号を無視してよく

$$d\Omega=2\pi\sin\theta\cdot d\theta=4\pi\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

であるから

$$\left.\frac{d\sigma}{d\theta}\right|_{CM}=\pi\alpha^2\left[\frac{E_1E_2}{p^2(E_1+E_2)}\right]^2\cdot\cot\frac{\theta}{2}\cdot\mathrm{cosec}^2\frac{\theta}{2}\cdot\left[1+\frac{p^2}{E_1E_2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]^2$$

と書ける．α は微細構造定数である．

5. 5 計算すべき積分は式(5.145)

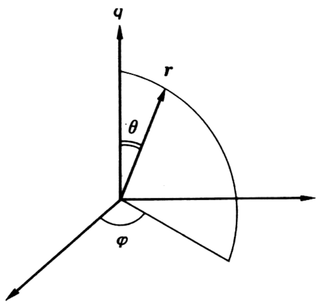
$$I=\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\cdot\frac{1}{r}\cdot e^{-\mu r}r^2 dr d\Omega$$

である．

ベクトル $\boldsymbol{q}$ を z 軸として極座標を導入すれば

$$e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}=e^{iqr\cos\theta}$$

$$d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$$



ただし $q=|\boldsymbol{q}|$ で，被積分関数は方位角 φ を含まないのですでに積分してある．θ に関する積分は $\cos\theta=x$ とおけば

$$\int_0^\pi e^{iqr\cos\theta}\sin\theta=\int_{-1}^1 e^{iqrx}dx=\left[\frac{e^{iqrx}}{iqr}\right]_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{iqr}(e^{iqr}-e^{-iqr})=\frac{2\sin(qr)}{qr}$$

$$\therefore \quad I=\frac{4\pi}{q}\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin(qr)dr=\frac{4\pi}{q}\cdot\frac{q}{q^2+\mu^2}=\frac{4\pi}{q^2+\mu^2}$$

上の r 積分は初等的であるが，もっとも簡単な導き方は三角関数を指数関数で置き換えることであろう．

$$\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin(qr)dr=\frac{1}{2i}\int_0^\infty(e^{-(\mu-iq)r}dr-e^{-(\mu+iq)r})dr$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-(\mu-iq)r}}{-(\mu-iq)}-\frac{e^{-(\mu+iq)r}}{-(\mu+iq)}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\mu-iq}-\frac{1}{\mu+iq}\right)=\frac{q}{\mu^2+q^2}$$

5. 6　式(5.168) を示すには式(5.165)，(5.167)，(5.166) を用いて確めてみればよい．z 方向に進む波の偏極ベクトルの成分を表にしておけば便利である．

	$\lambda=0$	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$
$\boldsymbol{\varepsilon}_0$	1	0	0	0
$\boldsymbol{\varepsilon}_1$	0	1	0	0
$\boldsymbol{\varepsilon}_2$	0	0	1	0
$\boldsymbol{\varepsilon}_3$	0	0	0	1

例えば $\mu=\nu=0$ であれば

$$\varepsilon_0(\lambda=1)\varepsilon_0(\lambda=1)+\varepsilon_0(\lambda=2)\varepsilon_0(\lambda=2)+\varepsilon_0(\lambda=3)\varepsilon_0(\lambda=3)$$
$$-\varepsilon_0(\lambda=0)\varepsilon_0(\lambda=0)=0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0-1\cdot1=-1=-g_{00}$$

$\mu=1$，$\nu=2$ であれば

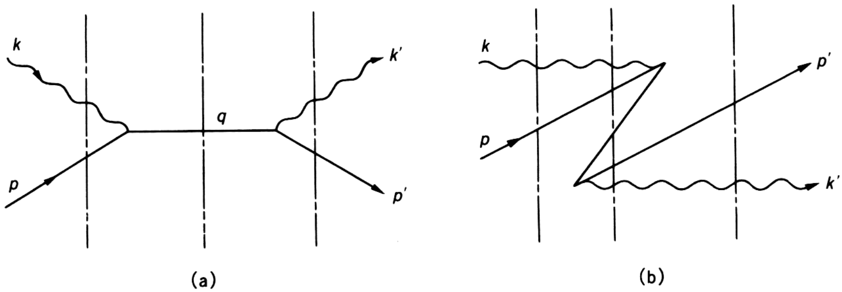
$$\varepsilon_1(\lambda=1)\varepsilon_2(\lambda=1)+\varepsilon_1(\lambda=2)\varepsilon_2(\lambda=2)+\varepsilon_1(\lambda=3)\varepsilon_2(\lambda=3)$$
$$-\varepsilon_1(\lambda=0)\varepsilon_2(\lambda=0)=1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0-0\cdot0=0=-g_{12}$$

$\mu=\nu=1$ であれば

$$\varepsilon_1(\lambda=1)\varepsilon_1(\lambda=1)+\varepsilon_1(\lambda=2)\varepsilon_1(\lambda=2)+\varepsilon_1(\lambda=3)\varepsilon_1(\lambda=3)$$
$$-\varepsilon_1(\lambda=0)\varepsilon_1(\lambda=0)=1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0-0\cdot0=1=-g_{11}$$

テンソル $g_{\mu\nu}$ は付録 A の式(A.65) に掲げてある．

5. 7 図 5.15 を再録する.



付録 A の式(A.84) は 2 次の摂動の振幅を

$$\sum_{n \neq \mathrm{i}} \langle \mathrm{f} | \hat{H}_{\mathrm{int}} | n \rangle \cdot \frac{1}{E_{\mathrm{i}} - E_n} \langle n | \hat{H}_{\mathrm{int}} | \mathrm{i} \rangle$$

と与える. この問題のモデルでは $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ の行列要素はすべて 1 であるから, 中間状態のエネルギー因子 $1/(E_{\mathrm{i}} - E_n)$ だけが問題である. 図 5. 5(a) の中間状態のエネルギーは運動量 $q = p + q$ の 1 粒子のみしか存在しないから E_n, 図 5(b) の中間状態にははじめと終わりに現れる 4 粒子のほかに, 運動量 $-(p' + k')$ を持つ反粒子が存在する. 反粒子のエネルギーは $\sqrt{m^2 + (-\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{k}')^2} = \sqrt{m^2 + (\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k}')^2} = E_n$ である. したがって中間状態のエネルギー因子はそれぞれの図について

$$\frac{1}{(E_p + E_k) - E_n} + \frac{1}{(E_p + E_n) - (E_p + E_k + E_n + E_{p'} + E_{k'})}$$

$$= \frac{1}{E_k + E_p - E_n} + \frac{1}{-(E_{k'} + E_{p'} + E_n)}$$

エネルギー保存則より $E_k + E_p = E_{k'} + E_{p'}$ だから上の式は

$$\frac{1}{E_k + E_p - E_n} - \frac{1}{E_k + E_p + E_n} = \frac{2E_n}{(E_k + E_p)^2 - E_n{}^2}$$

となる. 中間状態の粒子の運動量 q について和をとると積分因子 $\int \frac{\mathrm{d}^3 \boldsymbol{q}}{(2\pi)^3 \cdot 2E_n}$ を生ずるから, 分子の $2E_n$ と打ち消して所要の結果を得る.

また $q=(q_0,\ \boldsymbol{q})=(k_0+p_0,\ \boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})=(E_k+E_p,\ \boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})$ とおいて

$$(E_k+E_p)^2-E_n{}^2=(E_k+E_p)^2-m^2-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2$$
$$=(E_k+E_p)^2-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2-m^2=q_0{}^2-\boldsymbol{q}^2-m^2=q^2-m^2$$

と書くことができる．

《6 章》

6．1 (a)

$$\psi=N\begin{pmatrix}\phi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi\end{pmatrix}e^{-ipx},\quad \psi^\dagger=N^*\left(\phi^\dagger,\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^\dagger\right)e^{ipx}$$

と書くと ψ は 4 行 2 列，$\psi^\dagger$ は 2 行 4 列の行列をブロック記法で表したものである．ブロック記法で行列の乗法を行えば

$$\psi^\dagger\psi=|N|^2\left(\phi^{s\dagger},\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^{s\dagger}\right)\begin{pmatrix}\phi^s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}$$
$$=|N|^2\left(1+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{(E+m)^2}\right)\phi^{s\dagger}\phi^s$$

問題 3．2(b) より　$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^2=E^2-m^2=(E+m)(E-m)$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{(E+m)^2}\right)=1+\frac{E-m}{E+m}=\frac{2E}{E+m}$$

また式(3.61)，(3.62) よりスピン上向き，下向きのそれぞれの状態について $\phi^{s\dagger}\phi^s=1$

$$\therefore\quad \int d^3x\psi^\dagger\psi=|N|^2\cdot\frac{2E}{E+m}\cdot V=2E$$

したがって N を実数に選べば $N=\sqrt{(E+m)/V}$，これは式(6.31) の結果である．

(b) 前項(a)で得た結果より

$$\psi^s=u(p,\ s)\cdot\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}}\quad(s=1,\ 2)$$

Dirac 方程式(6.9)より　$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$，時空座標の微分を行うと $\partial_\mu(e^{-ipx})=-ip_\mu e^{-ipx}$ だから

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{または} \quad (\not{p} - m)u(p,\ s) = 0$$

この式のエルミート共役をとると $\psi^\dagger[(\gamma^\mu)^\dagger p_\mu - m] = 0$

しかるに $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu$ だから右から γ^0 を乗じて $\psi^\dagger$ のすぐ右側まで移動させれば

$$\bar{\psi}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0 \quad \text{または} \quad \bar{u}(p,\ s)(\not{p} - m) = 0$$

(c)　式(6.27)，(6.33) より負エネルギー解は

$$\psi^s = v(p,\ s)\cdot\frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \quad (s = 1,\ 2)$$

である．Dirac 方程式の時空座標の微分をとれば

$$(\not{p} + m)v(p,\ s) = 0$$

この式のエルミート共役をとって右から γ^0 を乗ずれば

$$\bar{v}(p,\ s)(\not{p} + m) = 0$$

6. 2　(a)　両辺の ij 要素を比較すると同じである．

$$(\mathbf{AB})^\dagger_{ij} = (\mathbf{AB})^*_{ji} = \mathbf{A}^*_{jk}\mathbf{B}^*_{ki} \quad (k \text{ について和})$$

$$(\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger)_{ij} = \mathbf{B}^\dagger_{ik}\mathbf{A}^\dagger_{kj} = \mathbf{B}^*_{ki}\mathbf{A}^*_{jk} \quad (\text{同　上})$$

(b)　ブロック記法の行列のエルミート共役をとるには，ブロックとして行と列を入れ替え，エルミート共役をとる．付録 A，式(A.34)にあからさまに 2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{\sigma}$，$\mathbf{1}$ が与えられているから，この操作を行なうと $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ がエルミート的であることがわかる．付録 D，式(D.8) に $\boldsymbol{\gamma}$ のあからさまな形が与えられているから，同様な操作を行なうと反エルミート的であることがわかる．

(c)

$$\overline{\gamma^\mu} = \gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \left\{\begin{array}{l}\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 \\ \gamma^0(-\boldsymbol{\gamma})\gamma^0 = \boldsymbol{\gamma}\end{array}\right\} = \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned}\overline{i\gamma_5} &= \gamma^0(i\gamma_5)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(-(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger)\gamma^0 \\ &= \gamma^0(\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0)\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma_5\end{aligned}$$

(d)

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

$$\overline{\sigma^{\mu\nu}}=\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0=\frac{-\mathrm{i}}{2}\gamma^0[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger-(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0$$

$$=\frac{-\mathrm{i}}{2}\gamma^0[(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger-(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\gamma^0(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0$$

すべての γ^μ について(a)より $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0=\gamma^\mu$

$$\therefore\quad \overline{\sigma^{\mu\nu}}=\frac{-\mathrm{i}}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu-\gamma^\mu\gamma^\nu)=\sigma^{\mu\nu}$$

6．3　(a)

$$\not{a}\not{b}=\gamma^\mu a_\mu\gamma^\nu b_\nu=a_\mu b_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu=a_\mu b_\nu(2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu)$$
$$=2a_\mu b^\mu-\not{b}\not{a}=2(a\cdot b)\mathbf{1}-\not{b}\not{a}$$

(b)　前項(a)で $a=b$ とおけば $(\not{a})^2=a^2\mathbf{1}$

$$\therefore\quad (\not{k}+m)(\not{k}-m)=k^2-m^2=0$$

式(6.39)，(6.40)

正エネルギー解　　$\psi_+{}^s=u(k,\ s)\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}}{\sqrt{V}}$

負エネルギー解　　$\psi_-{}^s=v(k,\ s)\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}}{\sqrt{V}}$

および式(6.35)，(6.38) より

$$(\not{k}-m)u(k,\ s)=0,\ (\not{k}+m)v(k,\ s)=0$$

である．$\Lambda_+(k)=\not{k}+m=(\not{k}-m)+2m$ を ψ_+^s，ψ_-^s に左から作用させると

$$\Lambda_+(k)\psi_+^s=2m\psi_+^s,\ \Lambda_+(k)\psi_-^s=0$$

すなわち正エネルギー解を選び出す．同様に $\Lambda_-(k)=(\not{k}+m)-2m$ を作用させ

$$\Lambda_-(k)\psi_+^s=0,\ \Lambda_-(k)\psi_-^s=-2m\psi_-^s$$

(c)　式(6.74) のあとに遂行してある計算を行列のブロック記法で示す．

$$\sum_s u(k,\ s)\bar{u}(k,\ s)=\sum_s(E+m)\begin{pmatrix}\phi^s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{s\dagger}, & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{E+m}\phi^{s\dagger}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_s(E+m)\begin{pmatrix}\phi^s\phi^{s\dagger} & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{E+m}\phi^s\phi^{s\dagger}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{E+m}\phi^s\phi^{s\dagger} & \dfrac{-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})}{(E+m)^2}\phi^s\phi^{s\dagger}\end{pmatrix}$$

ここに

$$\sum_s \phi^s \phi^{s\dagger} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})}{(E+m)^2} = \frac{-k^2}{(E+m)^2} = \frac{-(E^2-m^2)}{(E+m)^2} = \frac{-(E-m)}{E+m}$$

だから

$$\therefore \quad \sum_s u(k,\ s)\bar{u}(k,\ s) = \begin{pmatrix} (E+m) & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} & -(E-m) \end{pmatrix}$$

一方

$$(\not{k}+m) = (\gamma^\mu k_\mu + m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{k} + m \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E+m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} & -(E-m) \end{pmatrix}$$

となって両者は一致する.

6. 4 (a) 式(6.62)より 2 つの行列の積の対角和をとるときは，その積の順序をかえてよい. 積 **ABC** を 1 つの行列と考え，これと **D** との積の対角和をとると考えれば

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{ABCD}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{DABC})$$

以下同様に，循環的に行列の積の順序をかえても対角和は変わらない.

(b) 付録 D の式(D.25)から奇数個の γ の積の対角和は恒等的に 0 であるから

$$2L_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}[(\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu]$$
$$= \mathrm{Tr}(\not{k}'\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu) + m^2\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)$$

4 個の γ の積の対角和については付録 D の式(D.31)を利用したい. そのため γ_μ の添字を上にあげ，指標 α に対する成分が 1 でその他の成分が 0 であるベクトル M および指標 β に対する成分のみ 1 でほかの成分が 0 であるベクトル N を導入すれば

$$\gamma_\mu = g_{\mu\alpha}\gamma^\alpha = g_{\mu\alpha}\not{M}$$

$$\therefore\quad \mathrm{Tr}[\not{k}'\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu]=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\mathrm{Tr}[\not{k}'\not{M}\not{k}\not{N}]$$
$$=4g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}[(k'\cdot M)(k\cdot N)+(k'\cdot N)(M\cdot k)-(k'\cdot k)(M\cdot N)]$$
$$=4g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}[k'^\alpha k^\beta+k'^\beta k^\alpha-(k'\cdot k)\delta^{\alpha\beta}]$$
$$=4(k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu-(k'\cdot k)g_{\mu\nu})$$

また

$$q^2=(k-k')^2=k^2-2(k\cdot k')+k'^2=2m^2-2(k\cdot k')$$

だから

$$(k\cdot k')=m^2-\frac{q^2}{2}$$

2 つの γ の積の対角和は付録 D，式(D.30) より

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu]=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\mathrm{Tr}[\not{M}\not{N}]=4g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(M\cdot N)$$
$$=4g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta^{\alpha\beta}=4g_{\mu\nu}$$
$$\therefore\quad L_{\mu\nu}=2\left[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+\frac{q^2}{2}g_{\mu\nu}\right]$$

6．5　(a)

$$q^\mu L_{\mu\nu}=2\left[(q\cdot k')k_\nu+(q\cdot k)k'_\nu+\frac{q^2}{2}q_\nu\right]$$

しかるに

$$(q\cdot k')=(k-k',\ k')=(k\cdot k')-m^2$$
$$(q\cdot k)=(k-k',\ k)=m^2-(k\cdot k')=-(q\cdot k')$$
$$\therefore\quad q^\mu L_{\mu\nu}=2\left[(q\cdot k')(k-k')_\nu+\frac{q^2}{2}q_\nu\right]=2q_\nu\left[(q\cdot k')+\frac{q^2}{2}\right]$$
$$=2q_\nu\left(q,\ k'+\frac{q^2}{2}\right)=q_\nu(k-k',\ k+k')=q_\nu(k^2-k'^2)$$
$$=q_\nu(m^2-m^2)=0$$

q^ν を縮約しても同じ結果を得る．

(b)　$p+p'=2p+p'-p=2p+q$ と変形すれば(a)の結果により q と L の縮約は 0 である．

$$\therefore \quad T^{\mu\nu}L_{\mu\nu}=(2p+q)^{\mu}(2p+q)^{\nu}L_{\mu\nu}=4p^{\mu}p^{\nu}L_{\mu\nu}$$
$$=8\left[(p\cdot k')(p\cdot k)+(p\cdot k')(p\cdot k)+\frac{q^2}{2}\cdot p^2\right]$$
$$=8\left[2(k\cdot p)(k'\cdot p)+\frac{q^2}{2}\cdot M^2\right]$$

6．6 (a) 式(6.131)，(6.132)，(6.123) より

$$L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}_{\text{eff}}=4\left(k'_{\mu}k_{\nu}+k'_{\nu}k_{\mu}+\frac{q_2}{2}g_{\mu\nu}\right)\left(2p^{\mu}p^{\nu}+\frac{q^2}{2}g^{\mu\nu}\right)$$
$$=4\left[2(k'\cdot p)(k\cdot p)+2(k\cdot p)(k'p))+q^2(p\cdot p)\right.$$
$$\left.+\frac{q^2}{2}\left\{(k'\cdot k)+(k'\cdot k)+\frac{q^2}{2}\cdot 4\right\}\right]$$
$$=4[4(k'\cdot p)(k\cdot p)+q^2\{M^2+(k'\cdot k)+q^2\}]$$

電子の質量を無視する近似では

$$q^2=(k-k')^2=-2(k\cdot k')$$

だから

$$(k\cdot k')=-\frac{q^2}{2}$$

$$\therefore \quad L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=16(k'\cdot p)(k\cdot p)+4q^2\left(M^2+\frac{1}{2}q^2\right)$$

実験室系では式(6.93) の記号を用いて

$$p=(M,\ 0),\ \ k=(k,\ \boldsymbol{k}),\ \ k'=(k',\ \boldsymbol{k}')$$
$$k=|\boldsymbol{k}|,\ \ k'=|\boldsymbol{k}'|$$

となるから

$$(k'\cdot p)=k'M,\ \ (k\cdot p)=kM$$

また

$$q^2=(k-k')^2=-2k\cdot k'=-2(kk'-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')$$
$$=-2kk'(1-\cos\theta)=-4kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

ここに θ は実験室系の散乱角である．

$$\therefore \quad L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=16kk'M^2-16kk'\sin^2\frac{\theta}{2}\left(M^2+\frac{1}{2}q^2\right)$$

$$=16kk'M^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2M^2}q^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=16kk'M^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

付録 E の式(E.24)より第 1 の因子は無構造標的に対する縮約を与えている．式(6.121) よりスピンについて平均をした遷移振幅の 2 乗は

$$\frac{1}{4}\sum_{s,r}\sum_{s',r'}|F_{sr,s'r'}|^2=\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$$

$$=\frac{(4\pi\alpha)^2}{16k^2k'^2\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\cdot 16kk'M^2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

である．付録 E の断面積の式(E.2) の中で，実験室系ではフラックス因子は式(E.21)，相体積は式(E.39) で与えられるから

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{4Mk}\cdot\frac{(4\pi\alpha)^2M^2}{kk'\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{(4\pi)^2}\cdot\frac{k'^2}{Mk}$$

$$=\frac{\alpha^2}{4k^2\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{k'}{k}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\equiv\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{ns}}\cdot\left(1-\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

(b) 断面積を不変量で表した表式は式(5.122) である．すべての質量を無視する近似では

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{16\pi}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot|F|^2$$

$$|F|^2=\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2\cdot[16(k'\cdot p)(k\cdot p)+2q^4]$$

付録 E の式(E.11)，(E.12)，(E.13) より

$$s=(k+p)^2\cong 2(k\cdot p)$$

$$t=(k-k')^2=q^2$$

$$u=(k'-p)^2\cong -2(k'\cdot p)$$

$$\therefore\quad |F|^2=\frac{(4\pi\alpha)^2}{t^2}\cdot(-4su+2t^2)=(4\pi\alpha)^2\cdot 2\left(1-\frac{2su}{t^2}\right)$$

式(E.10) より　$s+t+u=0$　だから　$2su=t^2-s^2-u^2$

$$\therefore\quad 1-\frac{2su}{t^2}=1-\frac{t^2-s^2-u^2}{t^2}=\frac{s^2+u^2}{t^2}$$

断面積の式に代入して

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{16\pi}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot(4\pi\alpha)^2\cdot 2\cdot\frac{s^2+u^2}{t^2}$$

$$=\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{u^2}{s^2}\right)$$

実験室系では

$$p=(M,\ \mathbf{0}),\ k=(k,\ \boldsymbol{k}),\ k'=(k',\ \boldsymbol{k}')$$

いますべての質量を無視すれば

$$s=2(k\cdot p)=2Mk$$

$$u=-2(k'\cdot p)=-2Mk'$$

定義より

$$k'=k(1-y),\ \frac{u}{s}=-\frac{k'}{k}=-(1-y)$$

また

$$t=-(s+u)=2M(k'-k)=-2Mky=-sy$$

2変数の積分変数の変換係数を与えるヤコビアンはその絶対値をとるように，無限小 dt と無限小 dy の間の“量”の変換は符号を無視してよいであろう．

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}=s\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\cdot s\cdot\frac{1}{2}[1+(1-y)^2]$$

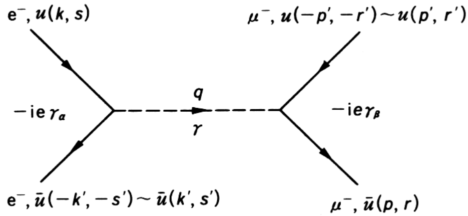
6．7　4元運動量を添記して反応

$$\mathrm{e}^-(k)+\mathrm{e}^+(k')\longrightarrow\mu^-(p)+\mu^+(p')$$

を考える．3．4節の Feynman の解釈に従って“粒子”像を用いて図形を書けば（時間の流れは左から右），次頁の図のようになる．

$$F=\bar{v}_\mathrm{e}(k',\ s')(-\mathrm{i}e\gamma_\alpha)u_\mathrm{e}(k,\ s)\cdot\frac{-\mathrm{i}g^{\alpha\beta}}{q^2}\cdot\bar{u}_\mu(p,\ r)(-\mathrm{i}e\gamma_\beta)v_\mu(p',\ \gamma')$$

$$q=k-(-k')=k+k'=p-(-p')=p+p'$$



したがって

$$F=\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\cdot g^{\alpha\beta}[\bar{v}_{\mathrm{e}}(k',\ s')\gamma_\alpha u_{\mathrm{e}}(k,\ s)][\bar{u}_\mu(p,\ r)\gamma_\beta v_\mu(p',\ r')]$$

$$|F|^2=\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 g^{\alpha\beta}g^{\lambda\rho}[\bar{v}_{\mathrm{e}}(k',\ s')\gamma_\lambda u_{\mathrm{e}}(k,\ s)]^\dagger[\bar{v}_{\mathrm{e}}(k',\ s')\gamma_\alpha u_{\mathrm{e}}(k,\ s)]$$

$$\times[\bar{u}_\mu(p,\ r)\gamma_\rho v_\mu(p',\ r')]^\dagger[\bar{u}_\mu(p,\ r)\gamma_\beta v_\mu(p',\ r')]$$

各粒子のスピン指標の和 $\sum_{s,s'}\sum_{r,r'}$ を行えば，電子の世界とミューオンの世界でそれぞれ独立に対角和をとることになる．たとえば電子のテンソル $L_{\lambda\alpha}$ は，初めのスピンについて平均を行ったうえで

$$L_{\lambda\alpha}=\frac{1}{2}\sum_{s,s'}[\qquad]^\dagger[\qquad]=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\not{k}+m_{\mathrm{e}})\gamma_\lambda(\not{k}'-m_{\mathrm{e}})\gamma_\alpha]$$

質量を無視する近似で

$$L_{\lambda\alpha}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma_\lambda\not{k}'\gamma_\alpha]=2[k_\lambda k'_\alpha+k'_\lambda k_\alpha-(k\cdot k')g_{\lambda\alpha}]$$

まったく平行にミューオンのテンソルは

$$M_{\rho\beta}=\frac{1}{2}\sum_{r,r}[\qquad]^\dagger[\qquad]=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\not{p}'-m_\mu)\gamma_\rho(\not{p}+m_\mu)\gamma_\beta]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma_\rho\not{p}\gamma_\beta]=2[p'_\rho p_\beta+p_\rho p'_\beta-(p\cdot p')g_{\rho\beta}]$$

テンソルの縮約を行えば

$$g^{\alpha\beta}g^{\lambda\rho}L_{\lambda\alpha}M_{\rho\beta}=L_{\lambda\alpha}M^{\lambda\alpha}=4.2[(p\cdot k)(p'\cdot k')+(p\cdot k')(p'\cdot k)]$$

である．重心系で 4 元運動量の成分を書くと

$$k=(\omega,\ \boldsymbol{k}),\ k'=(\omega',\ -\boldsymbol{k}),\ p=(\varepsilon,\ \boldsymbol{p}),\ p'=(\varepsilon'-\boldsymbol{p})$$

質量を無視する近似では

$$\omega=|\boldsymbol{k}|,\quad \omega'=|\boldsymbol{k}|,\quad \varepsilon=|\boldsymbol{p}|,\quad \varepsilon'=|\boldsymbol{p}|$$

エネルギーの保存 $\omega+\omega'=\varepsilon+\varepsilon'$ より

$$\omega=\omega'=\varepsilon=\varepsilon'\equiv\frac{Q}{2}$$

ただし Q は系の全エネルギーである.

$$\therefore\quad (p\cdot k)=\omega\varepsilon-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})=\frac{Q^2}{4}(1-\cos\theta)$$

$$(p'\cdot k')=\omega'\varepsilon'-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})=\frac{Q^2}{4}(1-\cos\theta)$$

$$(p\cdot k')=\omega'\varepsilon-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})=\frac{Q^2}{4}(1+\cos\theta)$$

$$(p'\cdot k)=\omega\varepsilon'-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})=\frac{Q^2}{4}(1+\cos\theta)$$

$$\therefore\quad L_{\lambda\alpha}M^{\lambda\alpha}=\frac{Q^4}{2}[(1-\cos\theta)^2+(1+\cos\theta)^2]=Q^4(1+\cos^2\theta)$$

ただし θ は重心系の生成角（$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{p}$ のなす角）である．また

$$q^2=(k+k')^2=+2(k\cdot k')=+2(\omega\omega'+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}))=+Q^2$$

$$\therefore\quad \overline{|F|^2}=\frac{e^4}{Q^4}\cdot Q^4(1+\cos^2\theta)=(4\pi\alpha)^2(1+\cos^2\theta)$$

重心系の断面積の式(5·115) に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}=\frac{1}{(8\pi Q)^2}\cdot(4\pi\alpha)^2(1+\cos^2\theta)=\frac{\alpha^2}{4Q^2}\cdot(1+\cos^2\theta)$$

全断面積は式(5·119) より $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}=2\pi\mathrm{d}(\cos\theta)$

$$\sigma=\frac{2\pi\alpha^2}{4Q^2}\cdot\int_0^\pi(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)=\frac{2\pi\alpha^2}{4Q^2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2}$$

6.8 定義 $\sigma^{\mu\nu}=(\mathrm{i}/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)$ を反交換関係 $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$ を用いて二様に変形すると

$$\sigma^{\mu\nu}=\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu)$$

$$\sigma^{\mu\nu}=\mathrm{i}(\gamma^\mu\gamma^\nu-g^{\mu\nu})$$

第一の式に p'_ν，第二の式に p_ν をかけて ν について和をとり，辺々相減ずると

$$\sigma^{\mu\nu}q_\nu=\mathrm{i}[(p'^\mu+p^\mu)-\not{p}'\gamma^\mu-\gamma^\mu\not{p}]$$

この恒等式を $\bar{u}(p')$, $u(p)$ ではさみ, Dirac 方程式

$$\bar{u}(p')(\not{p}'-M)=0,\ (\not{p}-M)u(p)=0$$

を用いると

$$\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p)=\mathrm{i}\bar{u}(p')[(p+p')^\mu-2M\gamma^\mu]u(p)$$

$$\therefore\quad \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)=\bar{u}(p')\left[\frac{(p+p')^\mu}{2M}+\frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2M}\right]u(p)$$

6. 9 式(5.160), (6.174), (6.80)を参照すると, 以下の図の (a), (b)の振幅は

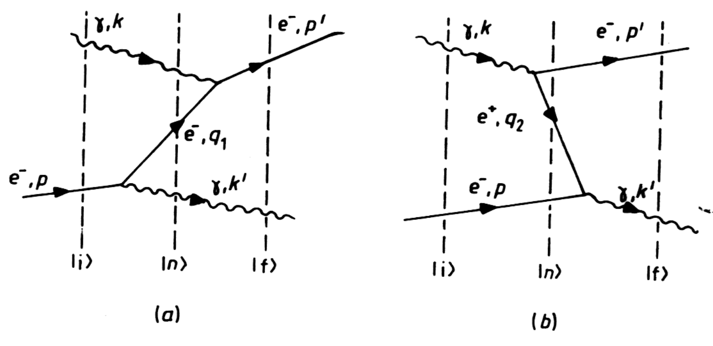
$$\frac{1}{2E_n}\left\{\frac{\not{q}_1+m}{(E_k+E_p)-(E_k+E_n+E_{k'})}-\frac{\not{q}_2-m}{(E_k+E_p)-(E_p+E_{p'}+E_n)}\right\}$$

である. エネルギー保存則 $E_k+E_p=E_{k'}+E_{p'}$ を用いて分母を書き直すと振幅は

$$\frac{1}{2E_n}\left\{\frac{\not{q}_1+m}{(E_p-E_{k'})-E_n}+\frac{\not{q}_2-m}{(E_p-E_{k'})+E_n}\right\}$$

となる. 分母を通分すれば

$$(E_p-E_{k'})^2-E_n{}^2=q_o{}^2-(m^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')^2)$$
$$=(q_o{}^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')^2)-m^2=q^2-m^2$$



対応する分子は

$$(\not{q}_1+m)[(E_p-E_{k'})+E_n]+(\not{q}_2-m)[(E_p-E_{k'})-E_n]$$
$$=(\not{q}_1+\not{q}_2)(E_p-E_{k'})+(\not{q}_1-\not{q}_2+2m)E_n$$

である．一方 q_1，q_2 の成分表示より

$$q_1+q_2=(2E_n,\ 0)$$
$$q_1-q_2=(0,\ 2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}'))$$

だから上の式は

$$2E_n\gamma^0(E_p-E_{k'})-2(\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')E_n+2mE_n$$
$$=2E_n[\gamma^0(E_p-E_{k'})-(\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')+m]$$
$$=2E_n[\not{q}+m]$$

となり所要の結果 $(\not{q}+m)/(q^2-m^2)$ を得る．スラッシュ記号の定義は式(6.8)にある．

6.10 まず ε_μ を k_μ で置き換える．このとき $\varepsilon_\nu{}^*$ もスラッシュ型にして振幅の中に入れておくと便利である．

$$\frac{F_{\gamma e}}{e^2}=\bar{u}(p')\cdot\frac{\not{\varepsilon}^*(\not{p}+\not{k}+m)\not{k}}{(p+k)^2-m^2}u(p)+\bar{u}(p')\frac{\not{k}(\not{p}-\not{k}'+m)\not{\varepsilon}^*}{(p-k')^2-m^2}u(p) \quad (1)$$

分母を変形しておく．

$$(p+k)^2-m^2=2(p\cdot k),\ (p-k')^2-m^2=-2(p\cdot k')$$

さらに保存則 $p+k=p'+k'$ より $p-k'=p'-k$ を 2 乗して $(p\cdot k')=(p'\cdot k)$ を得る．

第 1 項の分子の中で Dirac 方程式 $(\not{p}-m)u(p)=0$ を利用するため $\not{p}$ を右に移す工夫をすると

$$\bar{u}(p')\cdot\not{\varepsilon}^*(\not{p}+\not{k}+m)\not{k}u(p)=\bar{u}(p')\not{\varepsilon}^*[2(p\cdot k)-\not{k}\not{p}+m\not{k}]u(p)$$
$$=2(p\cdot k)\bar{u}(p')\not{\varepsilon}^*u(p)$$

ただし実光子に対して $\not{k}^2=0$ である．したがって振幅の式(1) の第 1 項は単に $\bar{u}(p')\not{\varepsilon}^*u(p)$ となる．

式(1) の第 2 項の分子に同じく Dirac 方程式 $\bar{u}(p')(\not{p}'-m)=0$ を利用するため $p-k'=p'-k$ と書き直す．分子は

$$\bar{u}(p')\not{k}(\not{p}'-\not{k}+m)\not{\varepsilon}^*u(p)$$
$$=\bar{u}(p')[2(p'\cdot k)-\not{p}'\not{k}+m\not{k}]\not{\varepsilon}^*u(p)=2(p'\cdot k)\bar{u}(p')\not{\varepsilon}^*u(p)$$

であるから，分母に $-2(p'\cdot k)$ の表式を用いれば第 2 項は $-\bar{u}(p')\not{\epsilon}^* u(p)$ となり，第 1 項と打ち消す．

次にϵ_ν^* を k'_ν で置き換えると同じ記法を用いて

$$\frac{F_{\gamma e}}{e^2}=\bar{u}(p')\frac{\not{k}'(\not{p}+\not{k}+m)\not{\epsilon}}{(p+k)^2-m^2}u(p)+\bar{u}(p')\frac{\not{\epsilon}(\not{p}-\not{k}'+m)\not{k}'}{(p-k')^2-m^2}u(p) \qquad (2)$$

となる．式(2)の第 1 項の分子に Dirac 方程式 $\bar{u}(p')(\not{p}'-m)=0$ を用いるため $p+k=p'+k'$ と書き直すと

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p')\not{k}'(\not{p}+\not{k}+m)\not{\epsilon}u(p)=\bar{u}(p')\not{k}'(\not{p}'+\not{k}'+m)\not{\epsilon}u(p)\\&=\bar{u}(p')[2(p'\cdot k')-\not{p}'\not{k}'+m\not{k}']\not{\epsilon}u(p)\\&=2(p'\cdot k')\bar{u}(p')\not{\epsilon}u(p)\end{aligned}$$

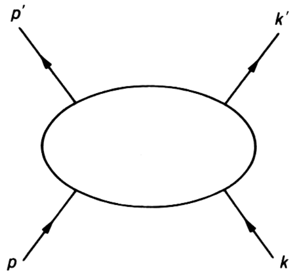
分母の表式に $2(p'\cdot k')$ を用いれば第 1 項は単に$\bar{u}(p')\not{\epsilon}u(p)$ と書ける．

次に式(2)の第 2 項の分子に Dirac 方程式 $(\not{p}-m)u(p)=0$ を用いるため $\not{p}$ を右に移せば

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p')\not{\epsilon}(\not{p}-\not{k}'+m)\not{k}'u(p)\\&=\bar{u}(p')\not{\epsilon}[2(p\cdot k')-\not{k}'\not{p}+m\not{k}']u(p)=2(p\cdot k')\bar{u}(p')\not{\epsilon}u(p)\end{aligned}$$

となる．分母の表式として $-2(p\cdot k')$ を用いれば第 2 項は $-\bar{u}(p')\not{\epsilon}u(p)$ となり第 1 項と完全に打ち消す．

6. 11 (a) 式(5.124)，(5.125)，(5.116)を参照して Mandelstam 変数を書いておく．



$$s=(p+k)^2=(p'+k')^2$$
$$t=(p-p')^2=(k'-k)^2$$
$$u=(p-k')^2=(p'-k)^2$$

直接項は式(6.176) より

$$F_{\gamma e}^{(d)}=\frac{e^2}{s-m^2}\cdot\varepsilon_\nu{}^{*\prime}\varepsilon_\mu\bar{u}(p')\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu u(p)$$

交換項(のエルミート共役)は式(6.177)より動標を $\mu\to\rho$, $\nu\to\sigma$ と書き換える. $\varepsilon_\rho{}^{*\prime}$, ε_σ は光子を放出および吸収するときの偏極ベクトルとして

$$F_{\gamma e}^{(e)*}=\frac{e^2}{u-m^2}\varepsilon_\sigma{}'\varepsilon_\rho{}^*\bar{u}(p)\gamma^\sigma(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma^\rho u(p')$$

である. 光子の偏りについての和 $\sum_\lambda$, $\sum_{\lambda'}$ を行うと式(5.168) より

$$\textstyle\sum_\lambda\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\rho{}^*(\lambda)=-g_{\mu\rho}$$
$$\textstyle\sum_{\lambda'}\varepsilon_\nu{}'^*(\lambda')\varepsilon_\sigma{}'(\lambda')=-g_{\nu\sigma}$$

である. また電子の偏りについての和は式(6.80) を用いて行うことができる. 光子と電子の偏りについて平均をとると干渉項は

$$\frac{1}{4}\sum_{\lambda\lambda'ss'}F_{\gamma e}^{(d)}F_{\gamma e}^{(e)*}=\frac{e^4}{4(s-m^2)(u-m^2)}$$
$$\times\sum_{ss'}\Big[\bar{u}(p')\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma_\nu(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma_\mu u(p)\Big]$$
$$=\frac{e^4}{4(s-m^2)(u-m^2)}\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{p}'+m)\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu(\not{p}$$
$$+m)]$$

ただし対角和をとるとき先頭の $\bar{u}(p')$ を最後に回した.

m を無視する近似では

$$\frac{1}{4}\sum F_{\gamma e}{}^{(d)}F_{\gamma e}{}^{(e)*}=\frac{\mathrm{e}^2}{4su}\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not{p}-\not{k}')\gamma_\mu\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\not{p}]$$

である. 付録Dの式(D.5) の公式は変形して

$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\nu\not{b}\gamma^\mu=-2\not{b}\gamma^\nu\not{a}$$

と書けることに注意しよう. ベクトル c を第 ν 成分だけ1で他の成分は0であるようなベクトルとすれば

$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\nu\not{b}\gamma^\mu=\gamma_\mu\not{a}\not{c}\not{b}\gamma^\mu=-2\not{b}\not{c}\not{a}=-2\not{b}\gamma^\nu\not{a}$$

となるからである. したがって式(D.4) と併用して

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not p-\not k')\gamma_\mu\not p'\gamma^\nu(\not p+\not k)\gamma^\mu\not p]$$
$$=-2\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not p-\not k')(\not p+\not k)\gamma^\nu\not p'\not p]$$
$$=-8(p-k',\ p+k)\mathrm{Tr}(\not p'\not p)$$
$$=-32(p-k',\ p+k)(p'\cdot p)$$

を得る．しかし $p^2=p'^2=k^2=k'^2=0$ と近似しているから $p+k=p'+k'$ より $(p\cdot k)=(p'\cdot k')$ である．

したがって

$$(p-k',\ p+k)=(p,\ p+k)-(k',\ p+k)$$
$$=(p,\ p+k)-(k',\ p'+k')=(p\cdot k)-(p'\cdot k')=0$$

となり，干渉項は消える．

(b)　交換項の振幅の 2 乗も同じ方法で求めることができる．式(6･177)より

$$F_{\gamma e}^{(e)}=e^2\varepsilon_\nu{}^{*\prime}\varepsilon_\mu\bar{u}(p')\gamma^\mu\frac{(\not p-\not k'+m)}{(\not p-\not k')^2-m^2}\gamma^\nu u(p')$$

だから動標を $\mu\to\rho$，$\nu\to\sigma$ とつけかえて

$$F_{\gamma e}^{(e)*}=e^2\varepsilon_\sigma{}'\varepsilon_\rho{}^*\bar{u}(p)\gamma^\sigma\frac{(\not p-\not k'+m)}{(\not p-\not k')^2-m^2}\gamma^\rho u(p')$$

と書ける．光子の偏りと電子の偏りについて平均をとれば

$$\frac{1}{4}\sum|F_{\gamma e}^{(e)}|^2=\frac{1}{4}\frac{e^4}{(u-m^2)^2}\sum_{ss'}\bar{u}(p)\gamma_\nu(\not p-\not k'+m)\gamma_\mu u(p')$$
$$\times\bar{u}(p')\gamma^\mu(\not p-\not k'+m)\gamma^\nu u(p)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^4}{(u-m^2)^2}\cdot\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not p-\not k'+m)\gamma_\mu(\not p'+m)\gamma^\mu(\not p-\not k'+m)\gamma^\nu(\not p+m)]$$

高エネルギーの近似をとって $m=0$ とおけば対角和は

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not p-\not k')\gamma_\mu\not p'\gamma^\mu(\not p-\not k')\gamma^\nu\not p]$$

付録 D の式(D.3)，(D.5) を用いると上式は

$$-2\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\not p-\not k')\not p'(\not p-\not k')\gamma^\nu\not p]$$
$$=4\mathrm{Tr}[(\not p-\not k')\not p'(\not p-\not k')\not p]$$

また $\not p^2=\not p'^2=m^2=0$ に注意して $\not p$ を 1 か所に集めればこの式は

$$4\mathrm{Tr}[\not p'(\not p-\not k')\not p(\not p-\not k')]$$
$$=4\mathrm{Tr}[\not p'\not k'\not p\not k']$$

となり，付録Dの式(D.31) および $\not{k}'^2=0$ を用いて

$$=16\cdot 2(p'\cdot k')(p\cdot k')$$

となる．

$$s=(p+k)^2=(p'+k')^2=2(p'\cdot k')$$

$$u=(p-k')^2=-2(p\cdot k')$$

より

$$\frac{1}{4}\sum|F_{\gamma e}{}^{(e)}|^2=\frac{e^4}{u^2}\cdot 4\cdot 2(p'\cdot k')(p\cdot k')=-2e^4\cdot\frac{s}{u}$$

である．

6. 12　前問 6. 11 の結果を，実光子 $k^2=0$ の条件を用いずに再録すると，依然 $p^2=p'^2=m^2=0$ であるから

$$\frac{1}{4}\sum|F_{\gamma e}^{(d)}|^2=\frac{e^4}{s^2}Tr(\not{p}'\not{k}\not{p}\not{k})=\frac{4e^4}{s^2}[2(p\cdot k)(p'\cdot k)-k^2(p\cdot p')]$$

$$\frac{1}{4}\sum|F_{\gamma e}^{(e)}|^2=\frac{e^4}{u^2}Tr(\not{p}'\not{k}'\not{p}\not{k}')=\frac{4e^4}{u^2}[2(p'\cdot k')(p\cdot k')-k'^2(p\cdot p')]$$

$$\frac{1}{4}\sum\left(F_{\gamma e}^{(d)}F_{\gamma e}^{(e)*}\right)=\frac{1}{4}\sum\left(F_{\gamma e}^{(d)*}F_{\gamma e}^{(e)}\right)$$

$$=\frac{e^2}{us}\cdot(-8)(p-k',\ p+k)(p'\cdot p)$$

となる．仮想 Compton 散乱

$$\gamma^*+e^-\rightarrow e^-+\gamma$$

においては $k^2=-Q^2$，$k'^2=0$ である．上に現れる 4 次元スカラー積をMandelstam 変数で表す．

$$s=(p+k)^2=2(p\cdot k)-Q^2$$

$$=(p'+k')^2=2(p'\cdot k')$$

$$u=(p-k')^2=-2(p\cdot k')$$

$$=(p'-k)^2=-2(p'\cdot k)-Q^2$$

$$t=(p-p')^2=-2(p\cdot p')$$

$$=(k'-k)^2=-2(k\cdot k')-Q^2$$

s，t，u の間には既知の関係

$$s+u+t=2(p'\cdot k')-2(p\cdot k')-2(k\cdot k')-Q^2$$
$$=2(p'-p-k,\ k')-Q^2=-2(k'\cdot k')-Q^2=-Q^2$$

がある．

$$(p\cdot k)=\frac{1}{2}(s+Q^2),\ (p'\cdot k)=-\frac{1}{2}(u+Q^2),\ (p\cdot p')=-\frac{t}{2}$$

を代入すると

$$\frac{1}{4}\sum|F_{\gamma e}^{(\mathrm{d})}|^2=\frac{4e^4}{s^2}\left[2\cdot\frac{1}{2}(s+Q^2)\cdot\frac{-1}{2}(u+Q^2)-\frac{t}{2}Q^2\right]$$
$$=\frac{2e^4}{s^2}[-(s+Q^2)(u+Q^2)-tQ^2]$$
$$=\frac{2e^4}{s^2}[-su-Q^2(u+s+t+Q^2)]=2e^4\cdot\frac{-u}{s}$$

となり，直接項の 2 乗は実光子の場合と同じ結果を与える．交換項の 2 乗は $k'^2=0$ だから実光子の場合と変わらない．

$$\frac{1}{4}\sum|F_{\gamma e}^{(\mathrm{e})}|^2=2e^4\cdot\frac{-s}{u}$$

また干渉項は $(p'\cdot k')=\frac{s}{2}$，$(p\cdot k')=\frac{-u}{2}$ より

$$\frac{1}{4}\sum(F_{\gamma e}^{(\mathrm{d})}F_{\gamma e}^{(\mathrm{e})*})=\frac{1}{4}\sum(F_{\gamma e}^{(\mathrm{d})*}F_{\gamma e}^{(\mathrm{e})})$$
$$=\frac{e^4}{us}\cdot(-8)\cdot(p-k',\ p'+k')(p'\cdot p)$$
$$=\frac{e^4}{us}\cdot(-8)[(p\cdot p')-(p'\cdot k')+(p\cdot k')](p'\cdot p)$$
$$=\frac{e^4}{us}\cdot(-8)\left(-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}-\frac{u}{2}\right)\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)$$
$$=\frac{-2e^4}{us}(t+s+u)\cdot t=2e^4\cdot\frac{Q^2t}{us}$$

となるから，振幅の 2 乗は式(6.189)

$$-2e^4\left(\frac{u}{s}+\frac{s}{u}-\frac{2Q^2t}{su}\right)$$

で与えられる．

6. 13 (a) 微分を実行してみれば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\frac{1}{[(1-\alpha)A+\alpha B]}=\frac{-(-A+B)}{[(1-\alpha)A+\alpha B]^2}=\frac{A-B}{[(1-\alpha)A+\alpha B]^2}$$

であるから

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}\alpha}{[(1-\alpha)A+\alpha B]^2}=\frac{1}{A-B}\left[\frac{1}{[(1-\alpha)A+\alpha B]}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{A-B}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{AB}$$

(b)　積分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{(k^2-m^2)}\cdot\frac{1}{[(k-q)^2-m^2]}\equiv I$

で $A=(k^2-m^2)$，$B=(k-q)^2-m^2$ とおけば

$$I=\int_0^1\mathrm{d}\alpha\cdot\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\{(1-\alpha)(k^2-m^2)+\alpha[(k-q)^2-m^2]\}^2}$$

分母を k の冪について整理すると

$$(1-\alpha)k^2+\alpha(k-q)^2-(1-\alpha)m^2-\alpha m^2$$
$$=k^2-2\alpha kq+\alpha q^2-m^2$$
$$=(k-\alpha q)^2-\alpha^2q^2+\alpha q^2-m^2$$
$$\equiv(k-\alpha q)^2-\Delta,\quad \Delta=\alpha^2q^2-\alpha q^2+m^2$$

変数を k から $k-\alpha q$ にかえてあらためて k と書き

$$I=\int_0^1\mathrm{d}\alpha\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{[k^2-\Delta]^2}$$

(c)　4 次元角度積分を分離すれば

$$I\sim\int_0^1\mathrm{d}\alpha\int\frac{\varkappa^3\mathrm{d}k}{[\varkappa^2+\Delta]^2},\quad \varkappa^2=(\varkappa^0)^2+\boldsymbol{k}^2$$

$\varkappa^2=u$ とおけば係数 1/2 を別にして

$$I\sim\int_0^1\mathrm{d}\alpha\int_0^\infty\frac{u\mathrm{d}u}{(u+\Delta)^2}$$

切断 Λ^2 を導入して

$$\int_0^{\Lambda^2}\frac{u\mathrm{d}u}{(u+\Delta)^2}=\int_0^{\Lambda^2}\left[\frac{1}{u+\Delta}-\frac{\Delta}{(u+\Delta)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\log(u+\Delta)\Big|_0^{\Lambda^2}+\frac{\Delta}{u^2+\Delta}\Big|_0^{\Lambda^2}$$

$$=\ln\left(\frac{\Lambda^2+\Delta}{\Delta}\right)+\frac{\Delta}{\Lambda^2+\Delta}-1$$

となり，$\Lambda^2\to\infty$ のとき対数的に発散する．

6．14 (a) 式(6.147) と (6.123) より

$$T^{\mu\nu}=4A\left[p^\mu-\frac{(p\cdot q)}{q^2}q^\mu\right]\left[p^\nu-\frac{(p\cdot q)}{q^2}q^\nu\right]+2M^2B\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)$$

$$L_{\mu\nu}=2\left[k'_\mu k_\nu+k_\mu k'_\nu+\frac{q^2}{2}g_{\mu\nu}\right]$$

であるが，式(6.130) の関係

$$q^\mu L_{\mu\nu}=q^\nu L_{\mu\nu}=0$$

があるので

$$T^{\mu\nu}_{\text{eff}}=4A\cdot p^\mu p^\nu-2M^2Bg^{\mu\nu}$$

とおいて縮約を行えばよい．その結果は

$$L_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{\text{eff}}=16A\left[(k\cdot p)(k'\cdot p)+\frac{M^2}{4}\cdot q^2\right]-4M^2Bq^2$$

である．ただし電子質量を無視する近似で

$$q^2=(k-k')^2=-2(k\cdot k')$$

とおいた．実験室系では

$$p=(M,\ 0),\ \ k=(k,\ \boldsymbol{k}),\ \ k'=(k,\ \boldsymbol{k}')$$

であるから

$$(k\cdot p)=Mk,\ \ (k'\cdot p)=Mk',\ \ q^2=-(k\cdot k')=-4kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

ただし θ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ のなす角である．これらを代入して

$$L_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{\text{eff}}=16kk'M^2\cos^2\theta\left(A+B\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

この最初の因子が無構造断面積に導くことは，問題6．6(a) で示してある．

(b) 式(6.149) の中で規格化定数をのぞく行列要素は

$$\bar{u}(p',\ s')\left(F_1\gamma^\mu+\frac{\mathrm{i}\varkappa F_2}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right)u(p,\ s)$$

である．2乗をとる前に問題6．8の Gordon 恒等式を用いて変形しておくと，対角和の計算を軽減できる．すなわち上の式は

$$\bar{u}(p',\ s')\left[(F_1+\varkappa F_2)\gamma^\mu-\frac{\varkappa F_2}{2M}(p,\ p')^\mu\right]u(p,\ s)$$

と書ける．これを2乗してスピンについての和と平均を行えば，陽子のテンソ

ルとして

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\qquad|^2$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big\{(\not p+M)\Big[(F_1+\varkappa F_2)\gamma^\mu-\frac{\varkappa F_2}{2M}(p+p')^\mu\Big]$$

$$\times(\not p+M)\Big[(F_1+\varkappa F_2)\gamma^\mu-\frac{\varkappa F_2}{2M}(p+p')^\nu\Big]\Big\}$$

を得る．ただし F_1, F_2 は実数と仮定する．対角和は，γ の積を 4 個含むもの 1 項，2 個含むもの 6 項，含まないもの 1 項であるが計算は定石どおりである．結果をまとめると

$$T^{\mu\nu}=2(F_1+\varkappa F_2)^2\Big(p^\mu p'^\nu+p'^\mu p^\nu+\frac{q^2}{2}g^{\mu\nu}\Big)$$

$$+2\Big[\Big(\frac{1}{2}-\frac{q^2}{8M^2}\Big)\varkappa^2F_2{}^2-\varkappa F_2\cdot(F_1+\varkappa F_2)\Big](p+p')^\mu(p+p')^\nu$$

ただし $q^2=(p'-p)^2=2[M^2-(p\cdot p')]$ の関係を用いた．電子のテンソルとの縮約を行うとき，恒等式(6・130)

$$q^\mu L_{\mu\nu}=q^\nu L_{\mu\nu}=0$$

があるから，$p'=p+q$ と書き直したとき縮約に関しては次の置き換えを行って差し支えない．

$$p^\mu\cdot p'^\nu\to p^\mu p^\nu,\quad p'^\mu p^\nu\to p^\mu p^\nu$$

$$(p+p')^\mu(p+p')^\nu\to 4p^\mu p^\nu$$

したがって

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{eff}}=4(F_1+\varkappa F_2)^2\Big(p^\mu p^\nu+\frac{q^2}{4}\cdot g^{\mu\nu}\Big)$$

$$+2\Big[\Big(2-\frac{q^2}{2M^2}\Big)\varkappa^2F_2{}^2-4\varkappa F_2(F_1+\varkappa F_2)\Big]p^\mu p^\nu$$

$$=4\Big(F_1{}^2-\frac{q^2}{4M_2}\varkappa^2F_2{}^2\Big)p^\mu p^\nu+(F_1+\varkappa F_2)^2q^2g^{\mu\nu}$$

これを前頁 (a) で見いだした式

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{eff}}=4Ap^\mu p^\nu-2M^2Bg^{\mu\nu}$$

と比較すれば，$\tau=-q^2/(4M^2)$ とおいて

$$A=F_1{}^2-\frac{q^2}{4M^2}\varkappa^2F_2{}^2=F_1{}^2+\tau\varkappa^2F_2{}^2$$

$$B=-\frac{q^2}{2M^2}(F_1+\varkappa F_2)^2=2\tau(F_1+\varkappa F_2)^2$$

が導かれる．

《7 章》

7．1　電磁相互作用による遷移の振幅は式(5.8)

$$\mathscr{A}=-\mathrm{i}\int j^\mu A_\mu \mathrm{d}^4x$$

で与えられる．図 7.1 に表されている包含非弾性電子・陽子散乱では，j^μ はp→X の遷移を表す電磁カレント，A_μ は電子の運動によって作られる電磁ポテンシャルである．前者を，標的陽子および粒子系 X の重心の質点としての時空自由度をあからさまに書いて

$$e\cdot\frac{1}{V}\cdot\langle \mathrm{X}\,;\,p'|J^\mu(0)|\mathrm{p}\,;\,p,\ s\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}$$

と表す．後者は Maxwell 方程式

$$\Box A_\mu=j_\mu(\mathrm{e}^-)$$

の解である．$j_\mu(\mathrm{e}^-)$ は電子の運動に伴う電磁カレント(電流)

$$j_\mu(\mathrm{e}^-)=(-e)\bar{\psi}_\mathrm{e}\gamma_\mu\psi_\mathrm{e}=(-e)\cdot\frac{1}{V}\cdot\bar{u}(k',\ r')\gamma_\mu u(k,\ r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')\cdot x}$$

である．式(5.183) との類推から解は

$$A_\mu=\frac{-1}{q^2}\cdot j_\mu(\mathrm{e}^-),\quad q\equiv k-k'$$

で与えられる．したがって

$$\mathscr{A}=-\mathrm{i}e^2\cdot\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{V^2}\cdot\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)\langle \mathrm{X}\,;\,p'|J^\mu(0)|\mathrm{p}\,;\,p\rangle$$

$$\times\int\mathrm{e}^{-qx}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')x}\mathrm{d}^4x$$

$$=(-\mathrm{i}e^2)\cdot\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{V^2}\cdot\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)\cdot\langle \mathrm{X}\,;\,p'|J^\mu(0)|\mathrm{p}\,;\,p\rangle$$

$$\times(2\pi)^4\delta^4(q+p-p')$$

$$|\mathscr{A}|^2=\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2\cdot\frac{1}{V^4}\cdot|\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)|^2|\langle \mathrm{X}\,;\,p'|J^\mu(0)|\mathrm{p}\,;\,p\rangle|^2$$

$$\times(2\pi)^8[\delta^4(q+p-p')]^2$$

式 (5.78) により単位面積あたりの遷移率 $P_{\rm fi}$ は，時空間の体積 VT で割らなくてはならないが，4 元運動量の保存 $p+k=p'+k'$ が δ 関数のパラメーター $q+p-p'=0$ と定義 $q=k-k'$ から出るから

$$VT=\int \mathrm{d}^4x=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k-p'-k')\cdot x}\mathrm{d}^4x$$
$$=(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')=(2\pi)^4\delta^4(q+p-p')$$

と考えてよい．したがって

$$P_{\rm fi}\equiv(2\pi)^4\cdot\delta^4(p+k-p'-k')\cdot\frac{1}{V^4}\cdot|F|^2$$

とおけば

$$|F|^2=\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2|\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)|^2|\langle \mathrm{X}\,;\,p'|J^\mu(0)|\mathrm{p}\,;\,p\rangle|^2$$

である．初めのスピン自由度について平均し，終わりの体系 X のあらゆる自由度について和をとれば，既知のテンソル表示が得られる．

$$\frac{1}{2}\sum_s|\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)|^2=L_{\mu\nu}$$
$$\sum_{\mathrm{X}}\sum_s\langle \mathrm{X}\,;\,p'|J^\mu(0)|\mathrm{p}\,;\,p\rangle|^2=W^{\mu\nu}$$

本文の式(7.2) の“陽子”テンソル $W^{\mu\nu}$ は，慣習的な因子 $V/4\pi M$ と $(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')=(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')$ を含んで定義されているが，そのときは $P_{\rm fi}$ の中からそれだけの因子が $|F|^2$ のほうへ移っていると考えればよい．

断面積を求めるには，$P_{\rm fi}$ をフラックスの因子式(5.82)でわり，まだ 1 つ残っている終わりの状態，電子 k' の質点自由度を乗ずれば得られる．

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4[(k\cdot p)^2-m^2M^2]^{1/2}}\cdot\frac{1}{V^2}\cdot\overline{|F|^2}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega'}$$

$$\overline{|F|^2}=\left(\frac{4\pi\alpha^2}{q^2}\right)^2L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$$

これは定義の中にどの自明な因子を取り込むか，という規約を別にすれば，包含反応の断面積として，本文の式(7.9)と一致する．さて，特に弾性散乱の場合は，体系 X に関する和 $\sum_{\mathrm{X}}$ は，終わりの陽子の質点としての自由度とスピンの自

由度の和にわたるから

$$W_{\rm el}^{\mu\nu}=\sum_s\sum_{s'}\langle \mathrm{p}\,;p,\ s|J^\mu(0)|\mathrm{p}\,;p',\ s'\rangle\langle \mathrm{p}\,;p',\ s'|J^\nu(0)|\mathrm{p}\,;p,\ s\rangle$$
$$\times\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3p'}{2E'}$$
$$\equiv M_{\rm el}^{\mu\nu}\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3p'}{2E'}$$

ただし $M_{\rm el}^{\mu\nu}$ は式(6.124) で表される.

$$\therefore\quad \mathrm{d}\sigma=\left(\frac{4\pi\alpha^2}{q^2}\right)\cdot=\frac{1}{4[(k\cdot p)^2-m^2M^2]^{1/2}}\cdot L_{\mu\nu}M_{\rm el}^{\mu\nu}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega'}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3p'}{2E'}$$
$$=\frac{1}{4[(p\cdot k)^2-m^2M^2]^{1/2}}\cdot\left(\frac{4\pi\alpha^2}{q^2}\right)^2L_{\mu\nu}M_{\rm el}^{\mu\nu}\cdot\mathrm{dLips}(k',\ p')$$

これは付録 E の式(E.2)にあたる. これから eμ 散乱とまったく一致する形の断面積の式が得られることは明らかである.

7. 2 (a) 包含非弾性電子・陽子散乱に対して式(6.88) と式(7.8) および式(6.130) より

$$L_{\mu\nu}=2\left[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+\frac{q^2}{2}g_{\mu\nu}\right]$$
$$W_{\mu\nu}=\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)\cdot W_1+\left[p^\mu-\frac{(p\cdot q)}{q^2}q^\mu\right]\left[p^\nu-\frac{(p\cdot q)}{q^2}q^\nu\right]\cdot\frac{W_2}{M_2}$$
$$q^\mu L_{\mu\nu}=q^\nu L_{\mu\nu}=0$$

$L_{\mu\nu}$ の中の数因子を左辺にうつし縮約を行えば

$$\frac{1}{2}L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=[-(k'\cdot k)-(k'\cdot k)-2q^2]W_1$$
$$+\left[(p\cdot k')(p\cdot k)+(p\cdot k')(p\cdot k)+\frac{q^2}{2}(p\cdot p)\right]\cdot\frac{W_2}{M^2}$$
$$\frac{1}{4}L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=-[(k\cdot k')+q^2]W_1+\left[(p\cdot k')(p\cdot k)+\frac{M^2q^2}{4}\right]\cdot\frac{W_2}{M^2}$$

実験室系では

$$p=(M,\ \mathbf{0}),\ \ k=(k,\ \boldsymbol{k}),\ \ k'=(k',\ \boldsymbol{k}')$$

ただし $k=|\boldsymbol{k}|$ とおくが 4 元運動量との混乱はあるまい. したがって

$$(k\cdot k')=kk'(1-\cos\theta)=2kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$q^2=(k-k')^2=-2(k'\cdot k)=-4kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$(p\cdot k')(p\cdot k)=Mk'\cdot Mk=M^2kk'$$

θ は散乱角（$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ のなす角）である．これらの式を代入すると

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=4kk'\left[W_1\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

これを式(7.9) に代入して $m=0$，$\mathrm{d}^3k'=k'^2\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega$ とおけば

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4k^2\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left[W_1\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

(b)　断面積をいろいろな変数の組み合わせで書き換える．$(k'\cdot\Omega)$ から $(Q^2,\ \nu)$ に転記するには，定義式(6.161), (7.6) より $\Omega=2\pi\cos\theta$ に注意して

$$\begin{cases} Q^2=-q^2=2kk'(1-\cos\theta)=\dfrac{kk'}{\pi}(2\pi-\Omega) \\ \nu=\dfrac{(p\cdot q)}{M}=k-k' \end{cases}$$

ヤコビアンを計算すれば

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q^2}{\partial k'} & \dfrac{\partial Q^2}{\partial\Omega} \\ \dfrac{\partial\nu}{\partial k'} & \dfrac{\partial\nu}{\partial\Omega} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{k}{\pi}(2\pi-\Omega) & -\dfrac{kk'}{\pi} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{kk'}{\pi}$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu=|J|\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega=\frac{kk'}{\pi}\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}=\frac{\pi}{kk'}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega}$$

右辺を Q^2 と ν，および入射条件のパラメーターとしての k で書き表すには

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{Q^2}{4kk'},\quad k'=k-\nu$$

とおき

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[W_2\left(1-\frac{\nu}{k}\right)+(2W_1-W_2)\cdot\frac{Q^2}{4k^2}\right]$$

を得る．さらに変数変換 $(Q^2,\ \nu)\rightarrow(x,\ y)$ を行う．定義より

$$x=\frac{Q^2}{2M\nu},\quad y=\frac{\nu}{k}$$

ヤコビアンは

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial Q^2} & \dfrac{\partial x}{\partial \nu} \\ \dfrac{\partial y}{\partial Q^2} & \dfrac{\partial y}{\partial \nu} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2M\nu} & \dfrac{-Q^2}{2M}\cdot\dfrac{1}{\nu^2} \\ 0 & \dfrac{1}{k} \end{vmatrix}=\frac{1}{2Mk\nu}=\frac{1}{2Mk^2y}$$

すなわち

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2Mk^2y}\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu$$

これは本文の式(7.17)である．

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}&=2Mk^2y\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}\\ &=\frac{2\pi\alpha^2}{k}\cdot\frac{1}{x^2y}\cdot\left[\frac{k}{M}\cdot W_2\cdot(1-y)+\left(W_1-\frac{W_2}{2}\right)xy\right]\end{aligned}$$

式(7.18)，(7.19)によりスケーリングの極限では

$$W_1\to\frac{F_1(x)}{M},\quad W_2\to\frac{F_2(x)}{\nu}=\frac{F_2(x)}{ky}$$

となるから

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}&\to\frac{2\pi\alpha^2}{k}\cdot\frac{1}{x^2y}\cdot\left[\frac{F_2}{M}\cdot\frac{1-y}{y}+\left(\frac{F_1}{M}-\frac{F_2}{2ky}\right)xy\right]\\ &\to\frac{2\pi\alpha^2}{kM}\cdot\frac{1}{x^2y^2}\cdot[F_2(x)\cdot(1-y)+F_1(x)\cdot xy^2]\end{aligned}$$

の形をとる．これはよく文献に引用されている形である．

7．3 (a) 横光子の断面積．採択した座標系では

$$p^\mu=(M,\ 0,\ 0,\ 0),\quad q^\mu=(q^0,\ 0,\ 0,\ q^3)$$

式(7.35)よりこの座標でも

$$\varepsilon_\mu(\lambda=+1)=\frac{-1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ -\mathrm{i},\ 0)$$

$$\varepsilon_\mu(\lambda=-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ +\mathrm{i},\ 0)$$

付録 A の式(A.66)より指標が下についたために空間部分の成分の符号が変わっていることに注意．$W^{\mu\nu}$ との縮約をとるとき，$\lambda=\pm1$ のどちらに対しても

$$\varepsilon_\mu p^\mu = 0, \quad \varepsilon_\mu q^\mu = 0$$

であることが成分の表示からわかる．したがって式(7.8) の $W^{\mu\nu}$ の中で W_2 に比例する項は寄与しない．

$$\sum_{\lambda=\pm1} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^* W^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\pm1} -(\varepsilon\cdot\varepsilon^*) W_1 = -\sum_{\lambda=\pm1} (\varepsilon_\mu\cdot\varepsilon^{\mu*}) W_1 = 2W_1$$

$$\because \quad \varepsilon_\mu(\lambda=+1)\cdot\varepsilon^{\mu*}(\lambda=+1) = \frac{1}{2}(0\cdot0-(-1)(-1)-(-\mathrm{i})(+\mathrm{i})-0\cdot0)$$
$$= -1$$

式(7.42) より横光子の断面積は

$$\sigma_\mathrm{T} = \frac{4\pi^2\alpha}{K}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2W_1 = \frac{4\pi^2\alpha}{K}\cdot W_1$$

(b) 縦光子の断面積．式(7.38) より

$$\varepsilon_\mu(\lambda=0) = \frac{1}{\sqrt{Q^2}}(q^3,\ 0,\ 0,\ -q^0)$$

である．再び $\varepsilon_\mu q^\mu = 0$ になることが確かめられる．したがって

$$\varepsilon_\mu(\lambda=0)\varepsilon_\nu^*(\lambda=0) W^{\mu\nu} = -(\varepsilon\cdot\varepsilon^*) W_1 + (p\cdot\varepsilon)(p\cdot\varepsilon^*)\cdot\frac{W_2}{M^2}$$

成分表示より明らかに

$$(\varepsilon\cdot\varepsilon^*) = \frac{1}{Q^2}[(q^3)^2-(q^0)^2]$$

$$(p\cdot\varepsilon) = (p\cdot\varepsilon^*) = \frac{1}{\sqrt{Q^2}} M q^3$$

ここで式(6.161)，(7.6) より

$$Q^2 = -q^2 = -[(q^0)^2-(q^3)^2] = (q^3)^2-(q^0)^2$$

$$\nu = \frac{(p\cdot q)}{M} = q^0$$

であるから

$$(\varepsilon\cdot\varepsilon^*) = 1, \quad (p\cdot\varepsilon)(p\cdot\varepsilon^*) = \frac{M^2}{Q^2}(q^3)^2 = \frac{M^2(Q^2+\nu^2)}{Q^2}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_\mu(\lambda=0)\varepsilon_\nu^*(\lambda=0) W^{\mu\nu} = -W_1 + \frac{Q^2+\nu^2}{Q^2}\cdot W_2$$

断面積は式(7.44) より

$$\sigma_{\rm S}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\cdot\left[-W_1+\frac{Q^2+\nu^2}{Q^2}\cdot W_2\right]$$

である．これから

$$\sigma_{\rm T}+\sigma_{\rm S}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\cdot\frac{Q^2+\nu^2}{Q^2}\cdot W_2$$

あるいは

$$W_1=\frac{K}{4\pi^2\alpha}\cdot\sigma_{\rm T},\quad W_2=\frac{K}{4\pi^2\alpha}\cdot\frac{Q^2}{Q^2+\nu^2}\cdot(\sigma_{\rm T}+\sigma_{\rm S})$$

7．4　(a)　式(6.166)から式(6.167)を導いたときの技法にならう．Drell-Yan の式(7.82)で q^2 は仮想光子の 4 元運動量の 2 乗，すなわち仮想光子の質量であり，物質化したレプトン対（対を 1 つの粒子のように考えて）の質量は M である．式(7.75) より

$$M^2=q^2=sx_1x_2$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}M^2}=\int\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}x_2}\cdot\delta(M^2-sx_1x_2)\mathrm{d}x_1x_2$$

$q^2=M^2$ とおいて式(7.82)を代入し，また式(7.75)より $M^2=q^2=s\tau=sx_1x_2$ に注意すれば

$$\delta(M^2-sx_1x_2)=\delta[s(\tau-x_1x_2)]=\frac{1}{s}\delta(\tau-x_1x_2)$$

$$=\frac{x_1x_2}{M^2}\cdot\delta(\tau-x_1x_2)$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}M^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{9M^4}\int x_1x_2\delta(\tau-x_1x_2)\sum_a e_a{}^2[q_a(x_1)\bar{q}_a(x_2)$$

$$+\bar{q}_a(x_1)q_0(x_2)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$M^2=s\tau$ とおけば，$s^2(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}M^2)$ の右辺は τ のみの有限な関数である．

(b)　$(x_1,\ x_2)$ から $(M^2,\ x_{\rm F})$ に変数変換を行う．

$$M^2=sx_1x_2,\quad x_{\rm F}=x_1-x_2$$

よりヤコビアンを計算すると

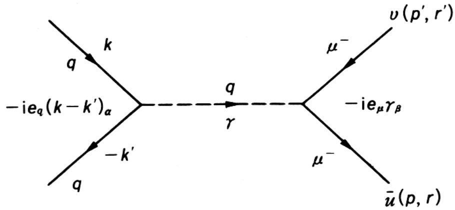
$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial M^2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial M^2}{\partial x_2}\\[2mm] \dfrac{\partial x_{\rm F}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_{\rm F}}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}sx_2 & sx_1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-s(x_1+x_2)$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}M^2\mathrm{d}x_\mathrm{F}=s(x_1+x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

Drell-Yan の断面積の式(7.82) で $q^2=M^2$, またヤコビアンの中で $s=q^2/\tau=M^2/\tau$, $x_1+x_2=\sqrt{x_\mathrm{F}{}^2+4\tau}\,(\tau=x_1x_2)$ とおけば

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}M^2\mathrm{d}x_\mathrm{F}}=\frac{4\pi^2\alpha}{9M^4}\cdot\frac{\tau}{\sqrt{x_\mathrm{F}{}^2+4\tau}}\cdot\sum_a e_a{}^2[q_a(x_1)\bar{q}_a(x_2)+\bar{q}_a(x_1)q_a(x_2)]$$

7.5 問題 6.7 にクォークがスピン 1/2 の粒子であるときの取り扱いがしてある. それに平行してクォークと光子の頂点を変更して振幅を書き下す. 反応は



$$q(k)+\bar{q}(k')\rightarrow\mu(p)+\bar{\mu}(p')$$

でクォークの電荷は e_q, ミューオンの電荷は e_μ とおく.

$$F=(\mathrm{i}e_q)[k+(-k')]_\alpha\cdot\frac{-\mathrm{i}g^{\alpha\beta}}{q^2}\cdot\bar{u}(p\cdot r)-\mathrm{i}e_\mu\gamma_\beta v(p',\ r')$$

$$q=k-(-k')=k+k'=p-(-p')=p+p'$$

したがって

$$F=\frac{-\mathrm{i}e_qe_\mu}{q^2}\cdot g^{\alpha\beta}(k-k')_\alpha\bar{u}(p\cdot r)\gamma_\beta v(p',\ r')$$

$$|F|^2=\left(\frac{e_qe_\mu}{q^2}\right)^2 g^{\alpha\beta}g^{\lambda\rho}(k-k')_\alpha(k-k')_\lambda L_{\beta\rho}$$

ミューオンのテンソルは

$$L_{\beta\lambda}=[\bar{u}(p,\ r)\gamma_\beta v(p',\ r')]^\dagger[\bar{u}(p,\ r)\gamma_\rho v(p',\ r')]$$

である. 質量を無視する近似でスピン r, r' について和をとると

$$\sum_{r,r'}L_{\beta\rho}=\sum_{r,r'}\bar{v}(p',\ r')\gamma_\beta u(p,\ r)\bar{u}(p,\ r)\gamma_\rho v(p',\ r')$$

$$=\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma_\beta\not{p}\gamma_\rho]=4[p'_\beta p_\rho+p_\beta p'_\rho-(p'\cdot p)g_{\beta\rho}]$$

テンソルの縮約を行えば

$$g^{\alpha\beta}g^{\lambda\rho}(k-k')_\alpha(k-k')_\lambda[p'_\beta p_\rho+p_\beta p'_\rho-(p'\cdot p)g_{\beta\rho}]$$
$$=2(k-k',\ p')(k-k',\ p)-(p',\ p)(k-k',\ k-k')$$
$$\therefore\quad |F|^2=\left(\frac{2e_qe_\mu}{q^2}\right)^2[2(k-k',\ p)(k-k',\ p')-(p',\ p)(k-k')^2]$$

重心系で 4 元運動量の成分を書けば

$$k=(\omega,\ \boldsymbol{k}),\ \ k'=(\omega',\ -\boldsymbol{k}),\ \ p=(\varepsilon,\ \boldsymbol{p}),\ \ p'=(\varepsilon',\ -\boldsymbol{p})$$

質量を無視する近似で

$$\omega=|\boldsymbol{k}|,\ \ \omega'=|\boldsymbol{k}|,\ \ \varepsilon=|\boldsymbol{p}|,\ \ \varepsilon'=|\boldsymbol{p}|$$

エネルギーの保存 $\omega+\omega'=k+k'=Q$ より

$$\omega=\omega'=\varepsilon=\varepsilon'=\frac{Q}{2}$$

Q は全系のエネルギーである．θ を重心系の生成角（$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{p}$ のなす角）とすれば

$$(p\cdot k)=\omega\cdot\varepsilon-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{Q^2}{4}(1-\cos\theta)$$

$$(p'\cdot k')=\omega'\cdot\varepsilon'-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{Q^2}{4}(1-\cos\theta)$$

$$(p\cdot k')=\omega'\cdot\varepsilon+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{Q^2}{4}(1+\cos\theta)$$

$$(p'\cdot k)=\omega\cdot\varepsilon'+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{Q^2}{4}(1+\cos\theta)$$

また

$$(k-k')^2=-2(k,\ k')=-2(\omega\omega'+\boldsymbol{k}^2)=-Q^2$$

$$(p'\cdot p)=\varepsilon\varepsilon'+\boldsymbol{p}^2=\frac{Q^2}{2}$$

$$q^2=(k+k')^2=2(k\cdot k')=Q^2$$

である．これらの式から

$$(k-k',\ p')=\frac{Q^2}{2}\cdot\cos\theta,\ (k-k',\ p)=\frac{-Q^2}{2}\cdot\cos\theta$$

が得られるから角分布は

$$|F|^2=\frac{4e_q{}^2e_\mu{}^2}{Q^4}\cdot\left[\frac{-Q^4}{2}\cos^2\theta-\frac{Q^2}{2}\cdot(-Q^2)\right]$$
$$=2e_q{}^2e_\mu{}^2(1-\cos^2\theta)$$

である.

REFERENCES

Abers E S and Lee B W 1973 *Phys. Rep.* **9C** 1
Abramowicz H *et al* 1982a *Z. Phys.* C **12** 289
—— 1982b *Z. Phys.* C **13** 199
—— 1983 *Z. Phys.* C **17** 283
Adeva B *et al* 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 665
Adler S and Dashen R F 1968 *Current Algebras* (New York: Benjamin)
Aharonov Y and Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485
Aitchison I J R 1972 *Relativistic Quantum Mechanics* (London: Macmillan)
—— 1982 *An Informal Introduction to Gauge Field Theories* (Cambridge: Cambridge University Press)
—— 1985 *Contemp. Phys.* **26** 333
Alles W, Boyer C and Buras A J 1977 *Nucl. Phys.* B **119** 125
Alper B *et al* 1973 *Phys. Lett.* **44B** 521
Altarelli G 1982 *Phys. Rep.* **81** 1
Altarelli G and Parisi G 1977 *Nucl. Phys.* B **126** 298
Altarelli G *et al* 1978a *Nucl. Phys.* B **143** 521
—— 1978b *Nucl. Phys.* B **146** 544 (E)
—— 1979 *Nucl. Phys.* B **157** 461
—— 1984 *Nucl. Phys.* B **246** 12
—— 1985 *Z. Phys.* C **27** 617
Althoff M *et al* 1984 *Z. Phys.* C **22** 307
Anderson C D 1932 *Science* **76** 238
Anderson C D and Neddermeyer S 1937 *Phys. Rev.* **51** 884
Anderson P W 1963 *Phys. Rev.* **130** 439
Antonelli F and Maiani L 1981 *Nucl. Phys.* B **186** 269
Appel J A *et al* 1986 *Z. Phys.* C **30** 341
Arnison G *et al* 1982 *Phys. Lett.* **118B** 167
—— 1983a *Phys. Lett.* **122B** 103
—— 1983b *Phys. Lett.* **126B** 398
—— 1984 *Phys. Lett.* **136B** 294
—— 1985 *Phys. Rev. Lett.* **158B** 494
—— 1986 *Phys. Lett.* **166B** 484
Attwood W B 1980 in *Proc. 1979 SLAC Summer Institute on Particle Physics* (SLAC-224) ed. A Mosher, vol 3
Aubert J J *et al* 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 1404
Augustin J E *et al* 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 1406
Bagnaia P *et al* 1983 *Phys. Lett.* **129B** 130
—— 1984 *Phys. Lett.* **144B** 283
Bailin D 1982 *Weak Interactions* (Bristol: Adam Hilger)

Banner M *et al* 1973 *Phys. Lett.* **44B** 537
—— 1982 *Phys. Lett.* **118B** 203
—— 1983a *Phys. Lett.* **122B** 322
—— 1983b *Phys. Lett.* **122B** 476
Barber D P *et al* 1979 *Phys. Rev. Lett.* **43** 830
Bardeen J 1957 *Nuovo Cimento* **5** 1766
Barger V, Martin A D and Phillips R J N 1983 *Z. Phys.* C **21** 99
Bartel W B *et al* 1968 *Phys. Lett.* **28B** 148
Behrend H-J *et al* 1982 *Phys. Lett.* **110B** 329
—— 1987 *Phys. Lett.* **183B** 400
Berends F A *et al* 1981 *Phys. Lett.* **103B** 124
Berends F A, Kleiss R and Jadach S 1983 *Nucl. Phys.* B **202** 63
Berman S M, Bjorken J D and Kogut J B 1971 *Phys. Rev.* D **4** 3388
Bernstein J 1968 *Elementary Particles and their Currents* (San Francisco: Freeman)
Berry M V 1984 *Proc. R. Soc.* A **392** 45
Bjorken J D 1969 *Phys. Rev.* **179** 1547
—— 1973 *Phys. Rev.* D **8** 4098
Bjorken J D and Drell S D 1964 *Relativistic Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill)
Bludman S A 1958 *Nuovo Cimento* **9** 443
Bodek A *et al* 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 1087
—— 1974 *Phys. Lett.* **51B** 417
Bogoliubov N N and Shirkov D V 1980 *Introduction to the Theory of Quantised Fields* (Chichester: Wiley-Interscience) 3rd edn, translated by S Chomet
Böhm M and Hollik W 1982 *Nucl. Phys.* B **204** 45
—— 1984 *Phys. Lett.* **139B** 213
Bohr N 1913 Phil Mag. **26** 1, 476, 857
Born M, Heisenberg W and Jordan P 1926 *Z. Phys.* **35** 557
Bosetti P C *et al* 1978 *Nucl. Phys.* B **142** 1
Bracci L and Fiorentini G 1982 *Phys. Rep.* **86** 169
Brandelik R *et al* 1979 *Phys. Lett.* **86B** 243
—— 1980 *Phys. Lett.* **97B** 453
Budny R 1975 *Phys. Lett.* **55B** 227
Büsser F W *et al* 1972 *Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Chicago* (Batavia: FNAL) vol 3
—— 1973 *Phys. Lett.* **46B** 471
Cabibbo N 1963 *Phys. Rev. Lett.* **10** 531
Callan C G and Gross D 1969 *Phys. Rev. Lett.* **22** 156
Cashmore R J, Hawkes C M, Lynn B W and Stuart R G 1986 *Z. Phys.* C **30** 125
Casimir H B G 1948 *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc.* **51** 793

Chambers R G 1960 *Phys. Rev. Lett.* **5** 3
CHARM Collaboration 1981 *Phys. Lett.* **99B** 265
Chen M-S and Zerwas P 1975 *Phys. Rev.* D **12** 187
Close F E 1979 *An Introduction to Quarks and Partons* (London: Academic)
Coleman S 1975 *Laws of Hadronic Matter* ed. A Zichichi (London: Academic) pp 141–2
Coleman S and Gross D J 1973 *Phys. Rev. Lett.* **31** 851
Collins J C 1984 *Renormalization* (Cambridge: Cambridge University Press)
Collins P D B and Martin A D 1984 *Hadron Interactions* (Bristol: Adam Hilger)
Combridge B L *et al* 1977 *Phys. Lett.* **70B** 234
Conversi M E *et al* 1947 *Phys. Rev.* **71** 209
Cooper L N 1956 *Phys. Rev.* **104** 1189
Cottingham W N and Greenwood D A 1986 *An Introduction to Nuclear Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
Creutz M 1979 *Phys. Rev. Lett.* **45** 313
—— 1983 *Quarks, Gluons and Lattices* (Cambridge: Cambridge University Press)
Cundy D C 1974 *Proc. XVII Int. Conf. on High Energy Physics, London, July 1974* (Didcot, Berks: Science Research Council) pp IV-131–IV-148
Dalitz R H 1953 *Phil. Mag.* **44** 1068
—— 1965 in *High Energy Physics* ed. C de Witt and M Jacob (New York: Gordon and Breach)
—— 1967 in *Proc. Second Hawaii Topical Conf. in Particle Physics,* ed. S Pakvasa and S F Tuan (Honolulu: University of Hawaii Press)
Danby G *et al* 1962 *Phys. Rev. Lett.* **9** 36
Dawson S, Hagelin J S and Hall L 1981 *Phys. Rev.* D **23** 2666
Decker R, Paschos E A and Brown R W 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 1192
de Groot J G H *et al* 1979 *Z. Phys.* C **1** 143
di Lella L 1985 *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **35** 107
—— 1986 in *Proc. Int. Europhysics Conf. on High Energy Physics, Bari, Italy, July 1985* ed. L Nitti and G Preparata (Bari: Laterza) pp 761ff
Dirac P A M 1927 *Proc. R. Soc.* A **114** 243
—— 1928 *Proc. R. Soc.* A **117** 610
—— 1931 *Proc. R. Soc.* A **133** 60
—— 1981 *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Oxford University Press) 4th edn (reprinted)
Drell S D and Yan T M 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 316
Duke D W and Roberts R G 1985 *Phys. Rep.* **120** 275
Eden R J, Landshoff P V, Olive D I and Polkinghorne J C 1966 *The Analytic S-matrix* (Cambridge: Cambridge University Press)
Ehrenburg W and Siday R E 1949 *Proc. Phys. Soc.* B **62** 8
Eisberg R M 1961 *Fundamentals of Modern Physics* (New York: Wiley)

Ellis J 1979 *Proc. LEP Summer Study, Geneva, 1979* CERN 79-01, pp 615ff
—— 1981 in *Proc. 1981 SLAC Summer Institute on Particle Physics* (SLAC-245) ed. A Mosher, pp 621ff
Ellis J and Karliner I 1979 *Nucl. Phys.* B **148** 141
Ellis J *et al* 1976a *Nucl. Phys.* B **106** 292
—— 1976b *Nucl. Phys.* B **111** 253
Englert F and Brout R 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 321
Faddeev L D and Popov V N 1967 *Phys. Lett.* **25B** 29
Fermi E 1934a *Nuovo Cimento* **11** 1
—— 1934b *Z. Phys.* **88** 161
Feynman R P 1962 *The Theory of Fundamental Processes* (New York: Benjamin) Ch 5
—— 1963a *Acta Phys. Polon.* **26** 697
—— 1963b *The Feynman Lectures on Physics* vol 1 (Reading, MA: Addison-Wesley) ch 15
—— 1964 *The Feynman Lectures on Physics* vol 2 (Reading: MA: Addison-Wesley)
—— 1965 *The Feynman Lectures on Physics* vol 3 (Reading; MA: Addison-Wesley)
—— 1972 *Statistical Mechanics* (Reading, MA: Benjamin)
—— 1977 in *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy* ed. R Balian and C H Llewellyn Smith (Amsterdam: North-Holland) p 121
Feynman R P and Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill)
Franck J and Hertz G 1914 *Verh. Deutschen Phys. Ges.* **16** 457
Fregeau J H and Hofstadter R 1955 *Phys. Rev.* **99** 1503
French A P and Taylor E F 1978 *An Introduction to Quantum Physics* (New York: Norton)
Friedman J I and Kendall H W 1972 *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **22** 203
Frishman Y 1974 *Phys. Rep.* **13C** 1
Fritzsch H and Gell-Mann M 1972 in *Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Chicago* (Batavia: FNAL) vol 2
Furman M 1982 *Nucl. Phys.* B **197** 413
Gasiorowicz S 1966 *Elementary Particle Physics* (New York: Wiley)
—— 1974 *Quantum Physics* (New York: Wiley)
Gastmans R 1975 *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies, Cargese 1975* ed. M Levy, J L Basdevant, D Speiser and R Gastmans (New York: Plenum) pp 109ff
Geer S 1986 in *High Energy Physics 1985, Proc. Yale Theoretical Advanced Study Institute* (Singapore: World Scientific) vol 2
Geiger H and Marsden E 1909 *Proc. R. Soc.* **82** 495
—— 1913 *Phil. Mag.* **25** 604

Gell-Mann M 1953 *Phys. Rev.* **92** 833
—— 1961 *California Institute of Technology Report* CTSL-20 (reprinted in Gell-Mann and Ne'eman 1964)
—— 1964 *Phys. Lett.* **8** 214
Gell-Mann M and Ne'eman Y 1964 *The Eightfold Way* (New York: Benjamin)
Georgi H and Glashow S L 1974 *Phys. Rev. Lett.* **32** 438
Georgi H, Quinn H R and Weinberg S 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 451
Gibson W M and Pollard B R 1976 *Symmetry Principles in Elementary Particle Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
Glashow S L 1961 *Nucl. Phys.* **22** 579
Glashow S L, Iliopoulos J and Maiani L 1970 *Phys. Rev.* D **2** 1285
Goldstone J 1961 *Nuovo Cimento* **19** 154
Gottschalk T and Sivers D 1980 *Phys. Rev.* D **21** 102
Green M B, Schwarz J H and Witten E 1987 *Superstring Theory* (Cambridge: Cambridge University Press) vols I and II
Greenberg O W 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 598
Gross D J and Llewellyn Smith C H 1969 *Nucl. Phys.* B **14** 337
Gross D J and Wilczek F 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343
Guralnick G S, Hagen C R and Kibble T W B 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 585
Halzen F and Martin A D 1984 *Quarks and Leptons* (New York: Wiley)
Herb S W *et al* 1977 *Phys. Rev. Lett.* **39** 252
Heisenberg W 1932 *Z. Phys.* **77** 1
Higgs P W 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 508
—— 1966 *Phys. Rev.* **145** 1156
Hofstadter R 1958 *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7** 231
't Hooft G 1971a *Nucl. Phys.* B **33** 173
—— 1971b *Nucl. Phys.* B **35** 167
—— 1971c *Phys. Lett.* **37B** 195
—— 1976 *High Energy Physics, Proc. European Physical Society Int. Conf.* ed. A Zichichi (Bologna: Editrice Composition) p 1225
—— 1980 *Sci. Am.* **242** (6) 90–116
't Hooft G and Veltman M 1972 *Nucl. Phys.* B **44** 189
Horgan R and Jacob M 1981 *Nucl. Phys.* B **179** 441
Hughes R J 1981 *Nucl. Phys.* B **186** 376
Innes W R *et al* 1977 *Phys. Rev. Lett.* **39** 1240
Isgur N and Karl G 1983 *Phys. Today* **36** (11) 36
Itzykson C and Zuber J-B 1980 *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill)
Jacob M and Landshoff P V 1978 *Phys. Rep.* **48C** 285
Jones S E 1986 *Nature* **321** 127
Kibble T W B 1967 *Phys. Rev.* **155** 1554
Kim K J and Schilcher K 1978 *Phys. Rev.* D **17** 2800

Kinoshita T 1962 *J. Math. Phys.* **3** 650
Kinoshita T and Sapirstein J 1984 in *Atomic Physics Nine*, ed. R S Van Dyck Jr and E N Fortson (Singapore: World Scientific)
Kitchener J A and Prosser A P 1957 *Proc. R. Soc.* A **242** 403
Kobayashi M and Maskawa K 1973 *Prog. Theor. Phys.* **49** 652
Kunszt Z and Piétarinen E 1980 *Nucl. Phys.* B **164** 45
La Rue G, Fairbank W M and Hebard A F 1977 *Phys. Rev. Lett.* **38** 1011
La Rue G, Phillips J D and Fairbank W M 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 967
Lattes C M G *et al* 1947 *Nature* **159** 694
Lautrup B 1976 *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies, Cargese 1975* ed. M Levy, J L Basdevant, D Speiser and R Gastmans (New York: Plenum) p 40
Lee B W, Quigg C and Thacker H B 1977 *Phys. Rev.* D **16** 1519
Lee T D 1981 *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (Chur: Harwood)
Lee T D and Nauenberg M 1964 *Phys. Rev.* B **133** 1549
Lee T D and Yang C N 1955 *Phys. Rev.* **98** 1501
—— 1956 *Phys. Rev.* **104** 254
—— 1962 *Phys. Rev.* **128** 855
LEP 1979 *Proc. LEP Summer Study, Geneva, 1979* CERN 79-01
Lichtenberg D B 1978 *Unitary Symmetry and Elementary Particles* (London: Academic) 2nd edn
Linde A D 1976 *JETP Lett.* **23** 73
Llewellyn Smith C H 1974 *Phenomenology of Particles at High Energies* ed. R L Crawford and R Jennings (London: Academic) pp 459–528
—— 1979 *Proc. LEP Summer Study, Geneva, 1979* CERN 79-01, pp 35ff
Llewellyn Smith C H and Wheater J F 1982 *Nucl. Phys.* B **208** 27
London F 1950 *Superfluids Vol 1, Microscopic Theory of Superconductivity* (New York: Wiley)
Lynn B W and Stuart R G 1985 *Nucl. Phys.* B **253** 216
Mandelstam S 1974 *Phys. Rep.* **13C** 259
—— 1976 *Phys. Rep.* **23C** 245
—— 1980 *Phys. Rep.* **67C** 109
Mandl F and Shaw G 1984 *Quantum Field Theory* (Chichester: Wiley)
Marciano W J 1979 *Phys. Rev.* D **20** 274
Marciano W J and Sirlin A 1984 *Phys. Rev.* D **29** 945
Maxwell J C 1864 *Phil. Trans. R. Soc.* **155** 459
Nambu Y 1960 *Phys. Rev. Lett.* **4** 380
—— 1974 *Phys. Rev.* D **10** 4262
Ne'eman Y 1961 *Nucl. Phys.* **26** 222
Nielsen H B and Olesen P 1973 *Nucl. Phys.* B **61** 45
Nielsen N K 1981 *Am. J. Phys.* **49** 1171

Nishijima K 1955 *Prog. Theor. Phys.* **13** 285
—— 1969 *Fields and Particles* (New York: W A Benjamin)
Noether E 1918 *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 171
Occhialini G P S and Powell C F 1947 *Nature* **159** 186
Pais A 1952 *Phys. Rev.* **86** 663
Panofsky W K H and Phillips M 1962 *Classical Electricity and Magnetism* (Reading, MA: Addison-Wesley) 2nd edn
Parisi G 1980 *Phys. Lett.* **90B** 295
Pati J C and Salam A 1974 *Phys. Rev.* D **10** 275
Pauli W 1933 *Handb. Phys.* **24** 246
Pennington M R 1983 *Rep. Prog. Phys.* **46** 393
Perkins D H 1947 *Nature* **159** 126
—— 1972 *Introduction to High Energy Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley)
—— 1982 *Introduction to High Energy Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley) 2nd edn
—— 1984 *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **34** 1
—— 1987 *Introduction to High Energy Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley) 3rd edn
Perl M *et al* 1975 *Phys. Rev. Lett.* **35** 1489
Politzer H D 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346
Prescott C Y *et al* 1978 *Phys. Lett.* **77B** 347
Quigg C 1977 *Rev. Mod. Phys.* **49** 297
Review of Particle Properties 1984 *Rev. Mod. Phys.* **56** S1-S304
Ross G G 1984 *Grand Unified Theories* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings)
Rubbia C, McIntyre P and Cline D 1977 *Proc. Int. Neutrino Conf., Aachen, 1976* (Braunschweig: Vieweg) p 683
Rutherford E 1911 *Phil. Mag.* **21** 669
Ryder L H 1985 *Quantum Field Theory* (Cambridge: Cambridge University Press)
Sachrajda C T C 1983 in *Gauge Theories in High Energy Physics, Les Houches Lectures, Session XXXVII* ed. M K Gaillard and R Stora (Amsterdam: North-Holland)
Sagawa H *et al* 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 93
Saint-James D, Sarma G and Thomas E J 1969 *Type II Superconductivity* (Oxford: Pergamon)
Sakurai J J 1960 *Ann. Phys., NY* **11** 1
Salam A 1968 *Elementary Particle Theory* ed. N Svartholm (Stockholm: Almqvist) p 367
Salam A and Ward J C 1964 *Phys. Lett.* **13** 168
Schiff L I 1955 *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill) 2nd edn
Schrieffer J R 1964 *Theory of Superconductivity* (New York: Benjamin)

Schwinger J 1957 *Ann. Phys, NY* **2** 407
—— 1962 *Phys. Rev.* **125** 397
Scott D M 1985 in *Proc. School for Young High Energy Physicists, Rutherford Appleton Laboratory, 1984* (RAL-85-010) ed. J B Dainton
Shaw R 1955 *The Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles: PhD Thesis* University of Cambridge
Sirlin A and Marciano W J 1981 *Nucl. Phys.* B **189** 442
Sparnaay M J 1958 *Physica* **24** 751
Staff of the CERN $\bar{p}p$ project 1981 *Phys. Lett.* **107B** 306
Street J C and Stevenson E C 1937 *Phys. Rev.* **52** 1003
Sushkov O P, Flambaum V V and Khriplovich I B 1975 *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** 537
Tassie L J 1974 *Int. J. Theor. Phys.* **9** 167
Taylor J C 1976 *Gauge Theories of Weak Interactions* (Cambridge: Cambridge University Press)
Taylor J R 1972 *Scattering Theory* (New York: Wiley)
Tilley D R and Tilley J 1986 *Superfluidity and Superconductivity* (Bristol: Adam Hilger)
Uehling E A 1935 *Phys. Rev.* **48** 55
Utiyama R 1956 *Phys. Rev.* **101** 1597
Van Dyck R S Jr, Schwinberg P B and Dehmelt H G 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 26
Veltman M 1977 *Act. Phys. Polon.* **B8** 475
Wegner F J 1971 *J. Math. Phys.* **12** 2259
Weinberg S 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1264
—— 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 294
—— 1980 *Rev. Mod. Phys.* **52** 513
von Weizsäcker C F 1934 *Z. Phys.* **88** 612
Wetzel W 1983 *Nucl. Phys.* B **227** 1
Wick G C 1938 *Nature* **142** 993
—— 1950 *Phys. Rev.* **80** 268
Wigner E P 1949 *Proc. Am. Phil. Soc.* **93** 521; also reprinted in *Symmetries and Reflections* (Bloomington: Indiana University Press) pp 3–13
Wilczek F 1977 *Phys. Rev. Lett.* **39** 1304
Williams E J 1934 *Phys. Rev.* **45** 729
Wilson K G 1969 *Phys. Rev.* **179** 1499
—— 1974 *Phys. Rev.* D **14** 2455
—— 1975 in *New Phenomena in Subnuclear Physics, Proc. 1975 Int. School on Subnuclear Physics 'Ettore Majorana'* ed. A Zichichi (New York: Plenum)
Wu C S, Ambler E, Hayward R W, Hoppes D D and Hudson R P 1957 *Phys. Rev.* **105** 1413
Yang C N and Mills R L 1954 *Phys. Rev.* **96** 191

Yukawa H 1935 *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17** 48
Zweig G 1964 *CERN Preprint* TH-401

索　　引

D

H

U

W

Y

Z

訳者紹介

ふじい　あきひこ
藤井　昭彦

1953年　東京大学理学部物理学科卒業
1958年　Rochester大学大学院卒業，Ph. D.
現　在　上智大学理工学部物理学科・教授
主要著訳書
「ベータ崩壊と弱い相互作用」(培風館，共著)
「時間の源流をたずねて」(講談社，共訳)
「ゲージ場入門」(講談社，訳書)

NDC421　402p.　21cm

ゲージ理論入門 I（第2版）
——電磁相互作用——

1992年7月1日　第1刷発行

定　価　5,300円(本体 5,146円)
訳　者　藤井昭彦
発行者　野間佐和子
発行所　株式会社　講談社
〒112－01 東京都文京区音羽2－12－21
販売部　(03)5395－3624
製作部　(03)5395－3615
編　集　株式会社　講談社サイエンティフィク
代表　加藤勝久
〒162 東京都新宿区新小川町9－25　日商ビル
編集部　(03)3235－3701
印刷所　株式会社　廣済堂
製本所　株式会社　国宝社

落丁本・乱丁本は，講談社書籍製作部宛にお送り下さい．
送料小社負担にてお取替えします．

ISBN4-06-153205-7　(KS)